5.3.2　忘れられない問題　～入試問題より～

長く生きていると忘れられない問題に出会います。私にとって忘れようと思っても忘れることのできない問題集です。

5.3.2.1　3 回出会った問題

問．$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\cos x+\sin x}\,dx,\ J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\cos x+\sin x}\,dx$ とします。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) $x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおいて置換積分法を用いることで，$I=J$ を示しなさい。

(2) $I+J$ の値を求めなさい。

(3) I と J の値を求めなさい。

この問題は 2014 年静岡大学の理学部・工学部の入学試験において出題された問題です。しかし私が高校 3 年生の時，受験勉強していたときに出会った問題とほぼ同じだったのです。どうして印象に残っているのかというと，単独では求めることが困難な定積分を互いに組み合わせることで求めることができることにビックリした記憶があります。さらに定期テスト前の勉強を学校でしていたとき，友人が「今度のテストに出そうな問題ある？」と聞いてきたので「あるよ！」とこの問題を言ったところ，そっくりそのまま定期テストに出題されたことでまた印象に残りました。さらに時代が進んだ 2014 年静岡新聞に掲載されたこの問題をみてまたビックリです。3 回も出会ったこととそのことを覚えていることに何か運命を感じました。模範解答も載せておきます。

(1) $x=\dfrac{\pi}{2}-t$ より $\dfrac{dx}{dt}=-1$

x	$0\to\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}\to 0$

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}(-dt)$$

$\sin(\theta+\frac{\pi}{2})=\cos\theta,\ \cos(\theta+\frac{\pi}{2})=-\sin\theta$ より

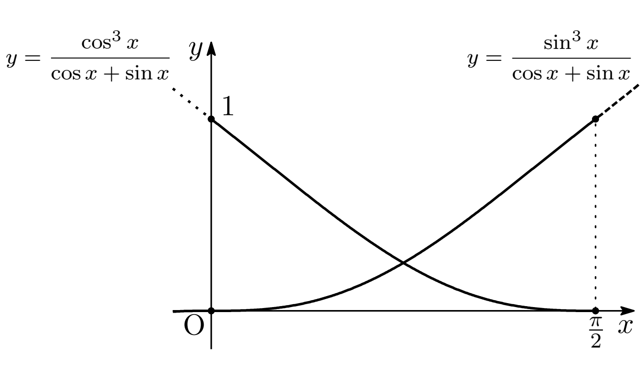
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin^3(-t)}{-\sin(-t)+\cos(-t)}\,dt$$

$\sin(-\theta)=-\sin\theta,\ \cos(-\theta)=\cos\theta$ より

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 t}{\sin t+\cos t}\,dt=J$$

(2)
$$\begin{aligned}I+J&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\cos x+\sin x}\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\cos x+\sin x}\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\cos x+\sin x}\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x+\sin x)(\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x)}{\cos x+\sin x}\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin x\cos x)\,dx\\&=\left[x-\frac{\sin^2 x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-1}{2}\end{aligned}$$

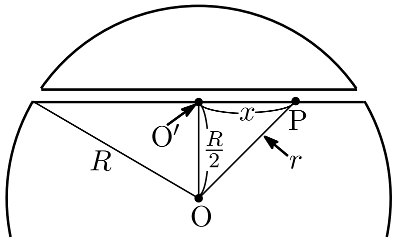
(3) $I=J$ より $I=J=\dfrac{\pi-1}{4}$



5.3.2.2　都市間貫通トンネル　〜未来の世界を感じさせてくれた問題〜

数学と物理は切っても切り離せない関係にあります。この問題も私が受験勉強のときに出会った問題です。都市と都市を地下トンネルで結ぶとエネルギーのいらない単振動をする列車ができるという問題です。実現は不可能かもしれないけど，未知なる未来社会を垣間見たような気がしました。正確な問題は忘れましたが，ネットで似たような問題をみつけました。2013 年京都大学の入試問題からの抜粋です。

問. 以下の設問では，地球は半径 R の球であり，密度は一様に分布していると考えてよい。また，地球の質量を M，万有引力定数を G とし，地球の自転の影響，摩擦，および空気の抵抗は無いものとする。
図のように，地球の中心 O から $\dfrac{R}{2}$ だけ離れたところを通る直線状の細いトンネルを掘った。中心 O からの距離が r で，トンネルの中心 O′ から x だけ離れたトンネル内の P 点にある質量 m の質点に働く重力の大きさは $\boxed{\text{①}}$ なので，その質点に働くトンネルに沿った方向の力の大きさは，m, M, R, x, G を使って $\boxed{\text{②}}$ で与えられる。したがって，地表で静止した状態からトンネルを通って反対側の地表に出るまでにかかる時間は $\boxed{\text{③}}$ である。



$$① \ \frac{GMm}{R^3}r \qquad ② \ \frac{GMmx}{R^3} \qquad ③ \ \pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

現在予定されているプロジェクトに，軌道エレベータがあります。呼称は”宇宙エレベータ”になりそうです。これは重力と遠心力が釣り合っている場所，気象観測の静止衛星がある地域帯から地球の表面と宇宙の方面に同じ工事，または宇宙側には同じ重量の重さで釣り合いを保ちながら工事をして地球の表面方向に空中駅を造り，宇宙に行く時間と燃料を節約しようというプロジェクトです。航空機で空中駅まで行き，その後はエレベータで静止衛星軌道上まで行くという宇宙旅行です。エレベータの動力は単振動の原理からわずかなエネルギーで動きます。当初は 2018 年完成予定で立ち上がったプロジェクトでしたが，費用の捻出や材料の調達の問題から現在では 2031 年完成を目指して進められているようです。真空チューブが必要なのですが現在のカーボンナノチューブの技術で建設可能だそうです。一度完成してしまえば，高度の関係から姿勢制御だけのエネルギーで気象の影響を受けることなく半永久的に使用可能ということです。ただその材料を宇宙に運ばなくてはいけないのが大変ですが，現在ではロケットを使って運ぶのではなく，野球のピッチャーみたいな遠心力を使ったマシンで材料は宇宙まで運べるようです。投げ上げた材料を捕球するキャッチャーをどうやって造るのかは知りませんが……。とにかく技術的には建設可能ということです。2045 年には AI が意志を持ってしまうのではないかと思われる技術的特異点，通称シンギュラリティ (Singularity) が発生するのではと予言されていますが，これよりも現実的に宇宙エレベータはできそうです。まぁ私は年齢の関係で自分の目で見ることはできないかもしれませんが，人類の科学技術の発展には注目していきたいと思っています。