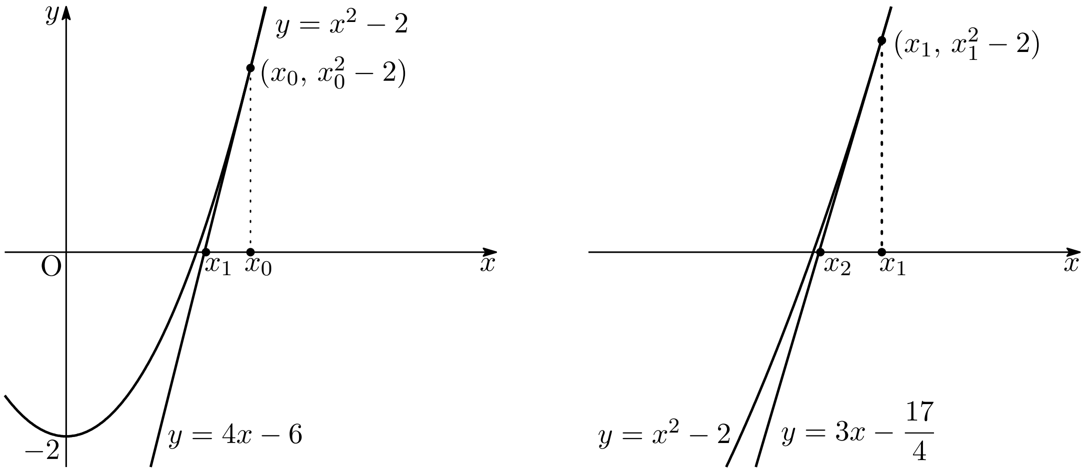
3.6.2　ニュートン法

微分法の学習のまとめで「ニュートン法」はどうだろうか。私は大学で学んだ教材だが，高校生にとっては多少面倒だが難問というレベルの問題ではないことはニュートン法を知っている先生だったら理解できると思う。知らない方もいると思うので概略から入ろう。

求めたい値，ここでは $\sqrt{2}$ で話を進める。まず求めたい値を $f(x)=0$ のとき与える関数を考える。この場合の関数は $f(x)=x^2-2$ である。最初は求めたい値の適当な近似値 x_0 から計算を始める。下にイメージのグラフを用意した。



左が通常のグラフで右が拡大したグラフである。x 軸の目盛りに注意して比較してください。黒板に簡単なグラフを書いて，点線を含む接線を 2 回ほど書けば，今求めている $\sqrt{2}$ に近づいている様子が理解できると思う。

n	x_n	x_n^2-2	$f'(x_n)$	直線の式	x 軸との交点 (x_{n+1})
0	2	4	4	$y=4x-6$	$\dfrac{3}{2}=\mathbf{1}.5$
1	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{1}{4}$	3	$y=3x-\dfrac{17}{4}$	$\dfrac{17}{12}=\mathbf{1.41}666\cdots$
2	$\dfrac{17}{12}$	$\dfrac{1}{144}$	$\dfrac{17}{6}$	$y=\dfrac{17}{6}x-\dfrac{577}{144}$	$\dfrac{577}{408}=\mathbf{1.414215}686\cdots$
3	$\dfrac{577}{408}$	$\dfrac{1}{166464}$	$\dfrac{577}{204}$	$y=\dfrac{577}{204}x-\dfrac{665857}{166464}$	$\mathbf{1.41421356237}46899\cdots$

このニュートン法は収束の仕方がかなり速い，といっても手計算では少し大変なので，電卓を用意するか，生徒が持っている pad の中の電卓を使った方が良いであろう。

$y=x^3-7$ を利用して $\sqrt[3]{7}$ を求めるニュートン法の結果を載せておく。

n	x_n	x_n^3-7	$f'(x_n)$	直線の式	x 軸との交点 (x_{n+1})
0	2	1	12	$y=12x-23$	$\dfrac{23}{12}=\mathbf{1.91}66666\cdots$
1	$\dfrac{23}{12}$	$\dfrac{71}{1728}$	$\dfrac{529}{48}$	$y=\dfrac{529}{48}x-\dfrac{18215}{864}$	$\mathbf{1.912938}458\cdots$
2	1.912938458	0.00007986714954	10.97800063	略	$\mathbf{1.912931182}80006\cdots$

x_{n+1} と x_n の関係式は $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ になる。この関係式は意外なほど簡単に求められるので時間があれば考えさせたい。