5.1.4　二項級数

高等学校の確率で組み合わせの記号 C を学ぶが，それを用いた数列には言及していない。わずかにパスカルの三角形の係数を表すために二項定理のところで出現するくらいである。放送大学のある講座で紹介された式に感動した。以下の問題はどうだろうか？

問．次の式を展開したとき x^4 と x^6 と x^8 の係数を求めなさい。

$$\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\frac{35}{128}x^8+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\frac{35}{128}x^8+\cdots\right)$$

上の式は 3 大数学者の一人ニュートンが発見した式なのだが，それぞれの係数はわかりましたか？

x^4 の係数は定数項と x^4 の項の積が 2 つ，x^2 と x^2 の項の積が 1 つより

$$1\cdot\frac{3}{8}\times 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$$

x^6 の係数は定数項と x^6 の項の積が 2 つ，x^2 と x^4 の項の積が 2 つより

$$1\cdot\frac{5}{16}\times 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}\times 2=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}=1$$

x^8 の係数は定数項と x^8 の項の積が 2 つ，x^2 と x^6 の項の積が 2 つ，x^4 と x^4 の項の積が 1 つより

$$1\cdot\frac{35}{128}\times 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{16}\times 2+\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{35}{64}+\frac{5}{16}+\frac{9}{64}=1$$

よって上の式を展開した形は $1+x^2+x^4+x^6+x^8+\cdots$ になり, 初項 1, 公比 x^2 の無限等比数列の和になります。$|x|<1$ のとき $\dfrac{1}{1-x^2}$ に収束します。1 につづく一般項 a_n は $a_n=\dfrac{{}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}}{2^{2n-1}}x^{2n}$ になります。具体的な係数の数列において，分母は簡単ですが分子は 1, 3, 10, 35, 126, $\cdots$ となり，この数列が C を用いた ${}_1\mathrm{C}_0$, ${}_3\mathrm{C}_1$, ${}_5\mathrm{C}_2$, ${}_7\mathrm{C}_3$, ${}_9\mathrm{C}_4\cdots$ になります。階差数列を用いても求めることができない数列ですが，かなり単純な数列です。数列においても C の威力がわかるんじゃないかなぁって思いました。

自分も含めてですが疑り深い性格の人は 2 個，3 個成り立つからって全部とは限らないと思います。もう一つ x^{10} の係数も確認してみましょう。

x^{10} の係数は定数項と x^{10} の項の積が 2 つ，x^2 と x^8 の項の積が 2 つ，x^4 と x^6 の項の積が 2 つより

$$1\cdot\frac{126}{512}\times 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{35}{128}\times 2+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{16}\times 2=\frac{63}{128}+\frac{35}{128}+\frac{30}{128}=1$$

次は証明か……私は自信なし，誰か教えてくれないかなぁ〜。