5.1.5　累乗数 (perfect power)

累乗のことを英語で"power"といいます。そして整数の累乗形には"perfect power"という名前がついています。この累乗数の逆数和についての問題です。

問．次の式を証明しなさい。

$$\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{m^k}=1$$

数学 III の「数列の極限」を学習した後の問題としてどうだろうか。

$$\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{m^k}=\sum_{m=2}^{\infty}\Big(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{m^k}\Big)$$

( ) 内の数列は初項 $\dfrac{1}{m^2}$，公比 $\dfrac{1}{m}$ の無限等比数列なので

$$\begin{aligned}
&=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{m}}\\
&=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^2}\cdot\frac{m}{m-1}\\
&=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m(m-1)}\\
&=\sum_{m=2}^{\infty}\Big(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\Big)\\
&=\Big(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\Big)+\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\Big)+\cdots\\
&=1
\end{aligned}$$

この数式の意味を具体的な数を用いて考えてみよう。

$$\begin{aligned}
\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{m^k}&=\sum_{m=2}^{\infty}\Big(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{m^k}\Big)\\
&=\sum_{m=2}^{\infty}\Big(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\cdots\Big)\\
&=\Big(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\Big)+\Big(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\Big)+\cdots
\end{aligned}$$

1 を除く自然数の累乗数の逆数和であることがわかる。ただし複数の累乗形で表すことができる $\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{4^2}=\dfrac{1}{2^4}$ や $\dfrac{1}{64}=\dfrac{1}{8^2}=\dfrac{1}{4^3}=\dfrac{1}{2^6}$ 等はそれぞれ独立した数として複数回加えている。

このことを学習すると，例えば 4 や 9 等の 1 通りの累乗形でしか表すことのできない累乗数 (整数列大辞典：$A093771$) に比べて，16 や 64 等の複数の累乗形で表すことのできる累乗数 (整数列大辞典：$A117453$) は特別な存在であることがわかる。整数の累乗形は"perfect power"だが 16 や 64 等の複数の累乗形をもつ数には何か特別な名前 (例えば"super perfect power") を付けてもいいのではないだろうか。最後にこの特別な累乗数を書いておこう。数を見ただけで複数の累乗形を頭に思い描くことができるだろうか。

1, 16, 64, 81, 256, 512, 625, 729, 1024, 1296, 2401, 4096, 6561, $\cdots$ (整数列大辞典：$A117453$)

【追記】1 を除くことに違和感を感じて以下の数式を作ってみた。

$$1+\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{m^k}=2$$