2.1.1.1　神経衰弱の確率資料編

今から考えていきますが，条件として 2 人でプレイし，その時々の先手の勝つ確率を P_1，後手の勝つ確率を P_2 とします。また，開いたカードは忘れない事とします。

2.1.1.2　4 枚のカードの場合

(i) 4 枚の内全部がわかっていないときの P_1(先手)，P_2(後手) の勝つ確率

- A_1
  - A_2
    - B_1 —— B_2 —— 先手勝ち②－0
    - B_2 —— B_1 —— 先手勝ち②－0
  - B_1
    - A_1 —— B_2 —— 後手勝ち 0－②
    - B_2 —— A_1 —— 後手勝ち 0－②
  - B_2
- A_2
- B_1
- B_2

同じ意味になる Tree は書いてありません。一番先頭の A_2 , B_1 , B_2 はその上の A_1 と同じです。以上の結果をまとめると，$P_1 = \dfrac{8}{24} = \dfrac{1}{3} \fallingdotseq 0.333\cdots$, $P_2 = \dfrac{16}{24} = \dfrac{2}{3} \fallingdotseq 0.666\cdots$ となります。

(ii) 4 枚の内 1 枚わかっているときの P_1(先手)，P_2(後手) の勝つ確率

カードを $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ とし，既知のカードを A_1 とする。

- A_2
  - B_1 —— B_2 —— 先手勝ち②－0
  - B_2 —— B_1 —— 先手勝ち②－0
- B_1
  - A_2 —— B_2 —— 後手勝ち 0－②
  - B_2 —— A_2 —— 先手勝ち②－0
- B_2

以上の結果をまとめると，$P_1 = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \fallingdotseq 0.666\cdots$, $P_2 = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \fallingdotseq 0.333\cdots$ となります。

2.1.1.3　6 枚のカードの場合

(i) 6 枚の内 1 枚もわかっていないときの P_1(先手)，P_2(後手) の勝つ確率

カードを $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ とする。

- A_1
  - A_2 —— 4 枚の内全部わかっていないときと同値
  - B_1 —— 6 枚の内 2 枚わかっているときと同値 (先後逆)
  - B_2
  - C_1
  - C_2
- A_2
- B_2
- B_2
- C_1
- C_2

以上の結果をまとめると，$P_1 = \dfrac{56 \times 6}{120 \times 6} = \dfrac{336}{720} = \dfrac{7}{15} \fallingdotseq 0.466\cdots$, $P_2 = \dfrac{64 \times 6}{120 \times 6} = \dfrac{384}{720} = \dfrac{8}{15} \fallingdotseq 0.533\cdots$ となります。

また 8 枚でプレイ時先手が 1 組とってこの状態になった時は，１－②の後手勝ちが引き分けになるので，そのときは後手の勝つ確率 $P_2 = \dfrac{48 \times 6}{120 \times 6} = \dfrac{288}{720} = \dfrac{6}{15} = 0.4$ となります。

(ii) 6 枚の内 1 枚わかっているときの P_1(先手)，P_2(後手) の勝つ確率

カードを $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ とし，既知のカードを A_1 とする。

- A_2
  - B_1 —— 4 枚の内全部わかっていないときと同値
  - B_2
  - C_1
  - C_2
- B_1
  - A_2 —— 4 枚の内 1 枚わかっているときと同値 (先後逆)
  - B_2 —— 4 枚の内 1 枚わかっているときと同値
  - C_1 —— 異なる 3 枚がわかったのですべて後手勝ち
  - C_2
- B_2
- C_1
- C_2

以上の結果をまとめると，$P_1 = \dfrac{32}{120} = \dfrac{4}{15} \fallingdotseq 0.266\cdots$, $P_2 = \dfrac{88}{120} = \dfrac{11}{15} \fallingdotseq 0.733\cdots$ となります。

また 8 枚でプレイ時先手が 1 組とってこの状態になった時は，１－②の後手勝ちが引き分けになるので，そのときは後手の勝つ確率 $P_2 = \dfrac{64}{120} = \dfrac{8}{15} \fallingdotseq 0.533\cdots$ となります。

(iii) 6 枚の内 2 枚わかっているときの P_1 , P_2 の勝つ確率

カードを $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ とし，既知のカードを A_1 と B_1 とする。

- A_2 —— —— 4 枚の内 1 枚わかっているときと同値
- B_2
- C_1
  - A_2 —— 4 枚わかったのですべて後手勝ち
  - B_2
  - C_2 —— 1 組とって 2 枚わかっているのですべて先手勝ち
- C_2

以上の結果をまとめると，$P_1 = \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2} = 0.5$, $P_2 = \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2} = 0.5$ となる。

また 8 枚でプレイ時先手が 1 組とってこの状態になった時は，１－②の後手勝ちが引き分けになるので，そのときは後手の勝つ確率 $P_2 = \dfrac{8}{24} = \dfrac{1}{3} \fallingdotseq 0.333\cdots$ となります。

(iv) 6 枚の内 3 枚わかっているときの P_1 , P_2 の勝つ確率

①カードを $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ とし，既知のカードを A_1 と B_1 と C_1 とする。

- A_2 —— 異なる 3 枚がわかっているのですべて先手勝ち
- B_2
- C_2

②カードを $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ とし，既知のカードを A_1 と A_2 と B_1 とする。

- —— A_1 —— A_2
  - B_2 —— 4 枚の内 1 枚わかっているときと同値
  - C_1
  - C_2

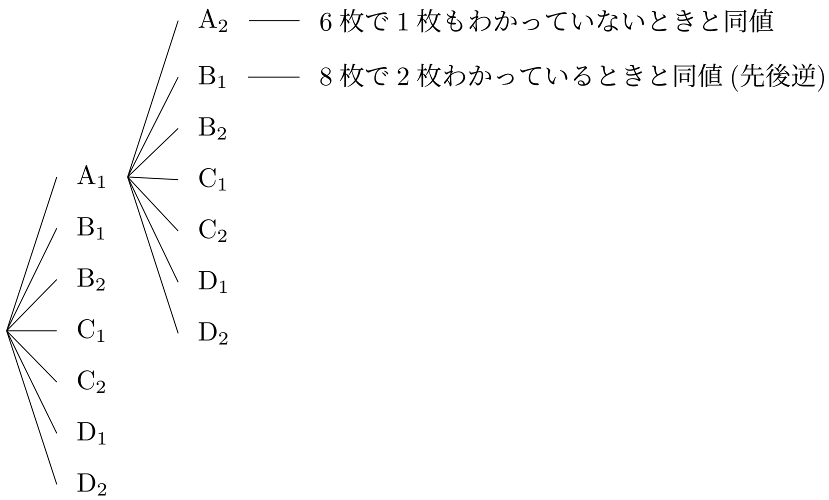
以上の結果をまとめると，$P_1 = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6} \fallingdotseq 0.833\cdots$，$P_2 = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6} \fallingdotseq 0.166\cdots$ となる。

また 8 枚でプレイ時先手が 1 組とってこの状態になった時は，1 −②の後手勝ちが引き分けになるので，そのときは後手の勝つ確率 $P_2 = \dfrac{0}{12} = 0$ となります。

2.1.1.4　8 枚のカードの場合

(i) 8 枚の内 1 枚もわかっていないときの P_1(先手)，P_2(後手) の勝つ確率

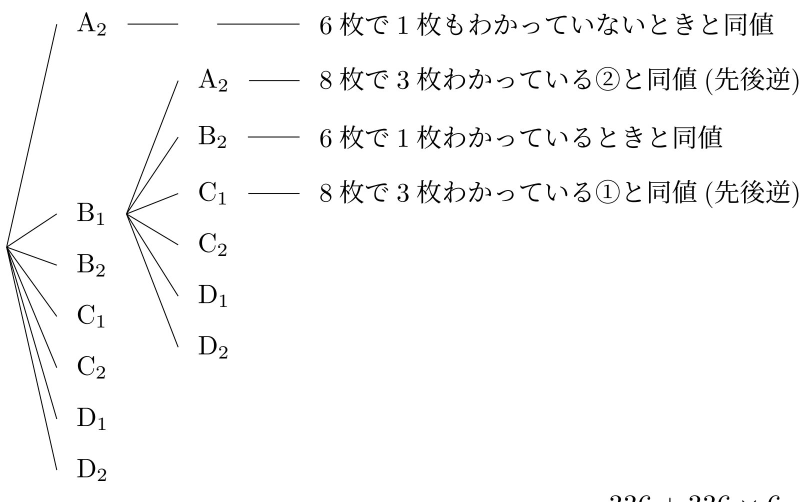
カードを $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2$ とする。



以上をまとめると，先手の勝つ確率 $P_1 = \dfrac{336 + 448 \times 6}{5040} = \dfrac{3024}{5040} = \dfrac{63}{105} = 0.6$，後手の勝つ確率 $P_2 = \dfrac{288 + 176 \times 6}{5040} = \dfrac{1344}{5040} = \dfrac{28}{105} \fallingdotseq 0.266\cdots$，引き分けの確率 $P = \dfrac{96 + 96 \times 6}{5040} = \dfrac{672}{5040} = \dfrac{14}{105} \fallingdotseq 0.133\cdots$ となる。

(ii) 8 枚の内 1 枚わかっているときの P_1(先手),P_2(後手) の勝つ確率

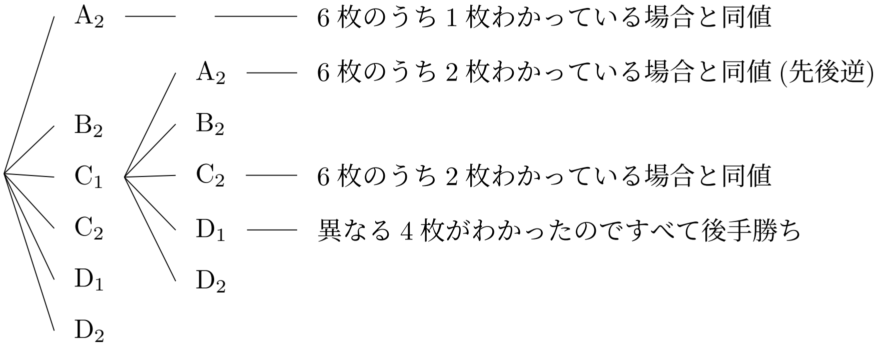
カードを $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2$ とし，既知のカードを A_1 とする。



以上をまとめると，先手の勝つ確率 $P_1 = \dfrac{336 + 336 \times 6}{5040} = \dfrac{2352}{5040} = \dfrac{49}{105} \fallingdotseq 0.466\cdots$，後手の勝つ確率 $P_2 = \dfrac{288 + 288 \times 6}{5040} = \dfrac{2016}{5040} = \dfrac{42}{105} = 0.4$，引き分けの確率 $P = \dfrac{96 + 96 \times 6}{5040} = \dfrac{672}{5040} = \dfrac{14}{105} \fallingdotseq 0.133\cdots$ となる。

(iii) 8 枚の内 2 枚わかっているときの P_1 , P_2 の勝つ確率

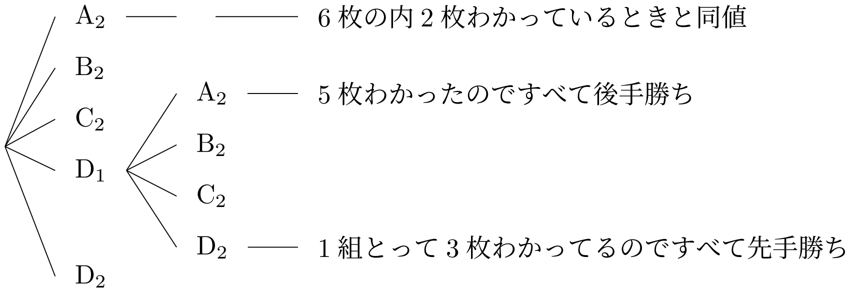
カードを $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2$ とし，既知のカードを A_1 と B_1 とする。



以上をまとめると，$P_1 = \dfrac{176}{720} = \dfrac{11}{45} \fallingdotseq 0.244\cdots$ ，$P_2 = \dfrac{448}{720} = \dfrac{28}{45} \fallingdotseq 0.622\cdots$，引き分けの確率 $P = \dfrac{96}{720} = \dfrac{6}{45} \fallingdotseq 0.133\cdots$ となる。

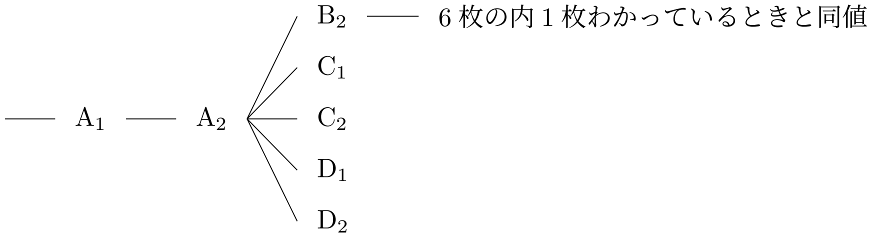
(iv) 8 枚の内 3 枚わかっているときの P_1 , P_2 の勝つ確率

① カードを $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2$ とし，既知のカードを A_1 と B_1 と C_1 とする。



以上をまとめると，$P_1 = \dfrac{48}{120} = \dfrac{4}{10} = 0.4$ ，$P_2 = \dfrac{60}{120} = \dfrac{5}{10} = 0.5$，引き分けの確率 $P = \dfrac{12}{120} = \dfrac{1}{10} = 0.1$ となる。

② カードを $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2$ とし，既知のカードを A_1 と A_2 と B_1 とする。



以上をまとめると，$P_1 = \dfrac{32}{120} = \dfrac{4}{15} \fallingdotseq 0.266\cdots$ ，$P_2 = \dfrac{64}{120} = \dfrac{8}{15} \fallingdotseq 0.533\cdots$，引き分けの確率 $P = \dfrac{24}{120} = \dfrac{3}{15} = 0.2$ となる。

①と②を総合すると，$P_1 = \dfrac{80}{240} = \dfrac{20}{60} \fallingdotseq 0.333\cdots$ ，$P_2 = \dfrac{124}{240} = \dfrac{31}{60} \fallingdotseq 0.516\cdots$，引き分けの確率 $P = \dfrac{36}{240} = \dfrac{9}{60} = 0.15$ となる。

(v) 8 枚の内 4 枚わかっているときの P_1 , P_2 の勝つ確率

① カードを $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2$ とし，既知のカードを A_1 と B_1 と C_1 と D_1 とする。

A_2 —— 異なる 4 枚がわかったのですべて先手勝ち
B_2
C_2
D_2

② カードを $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2$ とし，既知のカードを A_1 と A_2 と B_1 と C_1 とする。

—— A_1 —— A_2
B_2 —— 6 枚の内 2 枚わかっているときと同値
C_2
D_1
D_2

以上をまとめると，$P_1 = \dfrac{24+12}{48} = \dfrac{9}{12} = 0.75$ ，$P_2 = \dfrac{0+8}{48} = \dfrac{2}{12} \fallingdotseq 0.166\cdots$，引き分けの確率 $P = \dfrac{0+4}{48} = \dfrac{1}{12} \fallingdotseq 0.083\cdots$ となる。

2.1.1.5　まとめ

枚数を増やしながら考察してきたが，ここでは枚数が多い 8 枚から考えてみます。P_1 が先手, P_2 は後手です。

(i) 8 枚のとき

場面	P_1	P_2	引き分け
① 1 枚もわかっていないとき	0.6	0.266	0.133
② 1 枚わかっているとき	0.466	0.4	0.133
③ 2 枚わかっているとき	0.244	0.622	0.133
④ 3 枚わかっているとき	0.333	0.516	0.15
⑤ 4 枚わかっているとき	0.75	0.166	0.083

(ii) 6 枚のとき

場面	P_1	P_2	8 枚時 P_1 が 1 組とってむかえたときの P_2 の確率
⑥ 1 枚もわかっていないとき	0.466	0.533	0.4
⑦ 1 枚わかっているとき	0.266	0.733	0.533
⑧ 2 枚わかっているとき	0.5	0.5	0.333
⑨ 3 枚わかっているとき	0.833	0.166	0

(iii) 4 枚のとき

場面	P_1	P_2
⑩ 1 枚もわかっていないとき	0.333	0.666
⑪ 1 枚わかっているとき	0.666	0.333