6.3.3　内分・外分そしてアポロニウスの円

「元気が出る数学の授業」の P100 にある「元気話．外分と複素数」を加筆しました。

複素数平面では中学 1 年の負の数，中学 3 年の無理数以来，久しぶりに数の世界が広がります。既習の実数と対比させる意味で次のような問題を考えてみました。与えられた実数を比を用いて 2 つの数に分ける考察で，内分・外分の利用です。内分・外分はアポロニウス[1]の円 (下図参照) に発展できます。

> 問．6 を 2 : 1 の比に分ける数はいくつなんだろう？

※内分点 ($p<6$ のとき)

$$\begin{aligned} \mathrm{OP}:\mathrm{PA}&=2:1\\ 2\mathrm{PA}&=\mathrm{OP}\\ 2(6-p)&=p\\ 3p&=12\\ p&=4 \end{aligned}$$

※外分点 ($p>6$ のとき)

$$\begin{aligned} \mathrm{OP}:\mathrm{AP}&=2:1\\ 2\mathrm{PA}&=\mathrm{OP}\\ 2(p-6)&=p\\ p&=12 \end{aligned}$$

※軌跡 (数学 II)

$$\begin{aligned} \mathrm{OP}:\mathrm{AP}&=2:1\\ 2\mathrm{AP}&=\mathrm{OP}\\ 4\mathrm{AP}^2&=\mathrm{OP}^2 \end{aligned}$$

$\mathrm{P}(x,y)$, $\mathrm{A}(6,0)$ とすると

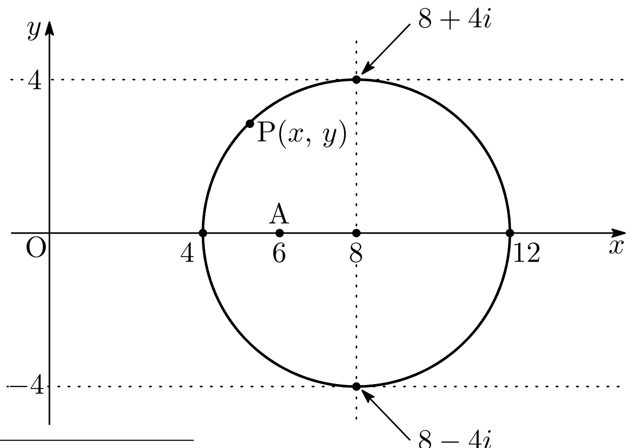
$$\begin{aligned} 4\left\{(x-6)^2+y^2\right\}&=x^2+y^2\\ 4x^2-48x+144+4y^2&=x^2+y^2\\ x^2-16x+48+y^2&=0\\ (x-8)^2+y^2&=16 \end{aligned}$$

※複素数平面

$$\begin{aligned} \mathrm{OP}:\mathrm{AP}&=2:1\\ |x+yi|:|(x-6)+yi|&=2:1\\ 2|(x-6)+yi|&=|x+yi|\\ 4|(x-6)+yi|^2&=|x+yi|^2\\ 4\left\{(x-6)^2+y^2\right\}&=x^2+y^2\\ 4x^2-48x+144+4y^2&=x^2+y^2\\ x^2-16x+48+y^2&=0\\ (x-8)^2+y^2&=16\\ |z-8|&=4 \end{aligned}$$

これは中心 (8, 0)，半径 4 の円を表している。

数直線上の数 (実数) しか知らない生徒は 2 つの数 4 と 12 しかみつけることができないが，平面の世界 (複素数平面) に数が広がると $8\pm4i$ や $5\pm\sqrt{7}\,i$ 等の複素数が含まれることを知り，条件を満たす数が無限にあることを感じることができます。他の解法として数学 II で学習した軌跡を用いた解法を載せましたが，軌跡やベクトルでは数として認識できません。広がった数の世界と今までの数の世界との橋渡しの問題となればなぁと感じました。授業目的に応じてどこまで指導するかは任せます。生徒が自力で新しい数を発見できたらほめてあげてくださいね。アポロニウスの円は線分を分ける図形として発見されました。複素数平面の発見とは時代が異なることもあわせて伝えるといいと思います。



[1] Apollonius of Perga (BC 262 年頃-BC 190 年頃)