2.2.9　三角形の 3 心と垂心・傍心

外心・内心・重心を決定する 3 本の直線が 1 点で交わるという性質は，作図で求めたときかなり気持ちがいいものである。外心はその後三角形の頂点を通る外接円の作図がまた気持ちいい。内接円も三角形の辺がしっかり接線になっているとすっきりする。それと比較して垂心はあっちの方に放り投げられている現状である。三角形は異なるが垂心と三角形の外心が一致する性質を組み合わせれば，外心だけで十分に 1 時間の教材として成立するはずである。中学校で既習でもほとんどの生徒が感覚的に覚えているので，しっかりと復習しながらその意味を再確認することは大切なことである。例えば「直線と線分の違いはなんだろう？」という問いに簡潔に答えられる生徒も少ない。直線は両端に伸びていて，線分は両端が点という決まり切った定義を答える生徒が大半である。大切なことは決定的な違いを感じているかである。

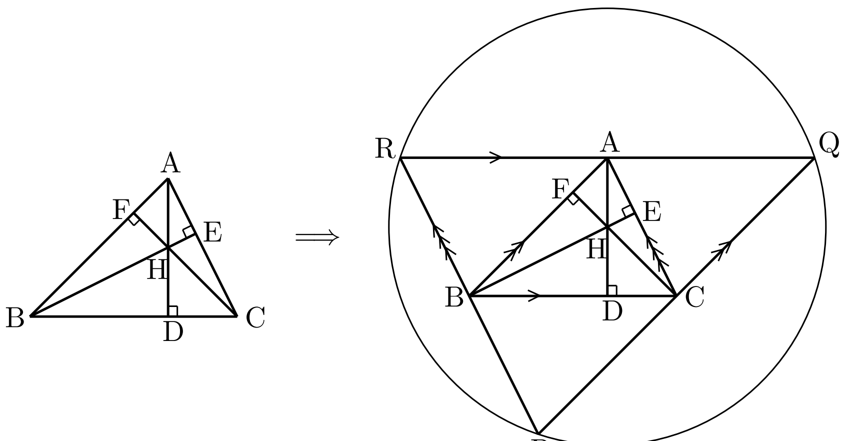
「直線にはなくて線分にはあるものはなんだろう？ 3 文字で答えなさい。」

答えは"長(なが)さ"である。

2.2.9.1　垂心

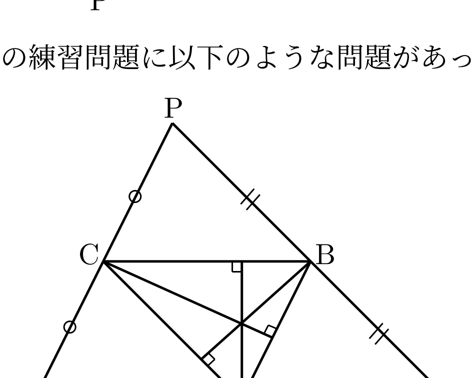
さて本題に戻ろう。外接円を学んだ後に垂心を学習させる。最初は作図から入り 1 点で交わることを実感させたい。次に「この垂心もなぜ 1 点で交わるのだろうか？」と問うのである。

作図した垂線を垂直二等分線とする三角形が作れれば，外心が 1 点で交わることから説明できることを理解させて，この 3 本の垂線を垂直二等分線とする三角形の存在を考えさせるのである。図の中の 3 つの平行四辺形に気がつけば中点連結定理にふれなくても小学生でも理解できる。



教科書改訂前の数研出版の数学 A 教科書の章末の練習問題に以下のような問題があった。

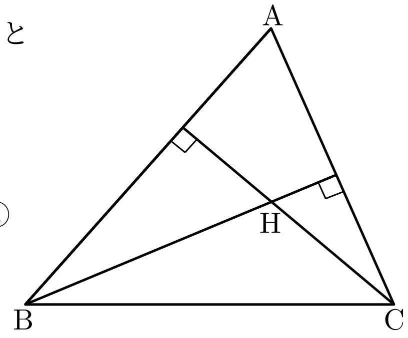
問. △PQR の辺 QR, RP, PQ の中点を，それぞれ A, B, C とする。△ABC において，各頂点から向かい合う辺に下ろした 3 本の垂線は，△PQR の外心で交わることを証明せよ。



証明は中点連結定理を用いた基本的な証明である。ここでは省略するが，教科書を回して見ると上記と同じ △ABC を見ることができる。この垂心の証明を意識していると感じた。

垂心の最後に数学 C のベクトルを用いての証明を載せておく。ベクトルの指導の後，たぶん忘れているであろう生徒に数学 A ではどうやって証明したのか尋ねるのもいいと思う。

> 問. △ABC において頂点 B, C から向かいあう辺またはその延長線上に垂線を下ろし，その 2 直線の交点を H とするとき，AH ⊥ BC を証明しなさい。



A, B, C, H の位置ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{h}$ とすると

仮定 BH ⊥ AC より

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= 0\\
(\overrightarrow{h}-\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}) &= 0\\
\overrightarrow{h}\cdot\overrightarrow{c}-\overrightarrow{h}\cdot\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} &= 0\\
\overrightarrow{h}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} &= \overrightarrow{h}\cdot\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\ \cdots\cdots①
\end{aligned}$$

仮定 CH ⊥ AB より

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= 0\\
(\overrightarrow{h}-\overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}) &= 0\\
\overrightarrow{h}\cdot\overrightarrow{b}-\overrightarrow{h}\cdot\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} &= 0\\
\overrightarrow{h}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} &= \overrightarrow{h}\cdot\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\ \cdots\cdots②
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} &= (\overrightarrow{h}-\overrightarrow{a})\cdot(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b})\\
&= \overrightarrow{h}\cdot\overrightarrow{c}-\overrightarrow{h}\cdot\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\\
&= (\overrightarrow{h}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})-(\overrightarrow{h}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c})
\end{aligned}$$

①, ②より

$$\begin{aligned}
&= (\overrightarrow{h}\cdot\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})-(\overrightarrow{h}\cdot\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})\\
&= 0
\end{aligned}$$

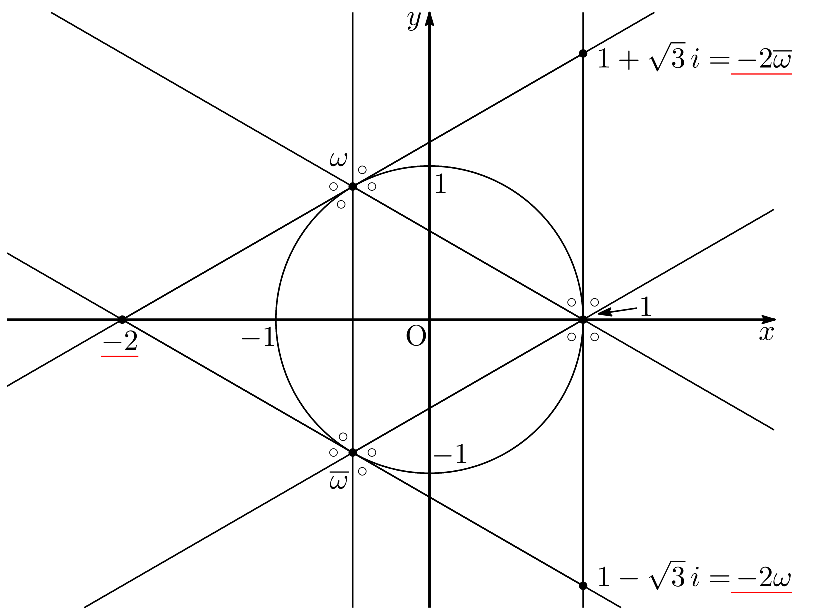
よって $\overrightarrow{\mathrm{AH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$，これより AH ⊥ BC

図を見て感じたのだが，同じ意味の問題なのに点を表す記号が 4 つしかない。向きだけを考えることができるベクトルの性質を用いての証明は，これはこれで美しいと感じました。

2.2.9.2　傍心

3 直線が 1 点で交わらないので，忘れられている外角の二等分線からできる傍心だが，複素数平面を組み合わせると面白い問題ができることに気がつきました。

> 問. 方程式 $z^3 - 1 = 0$ の解を複素数平面にとり，それぞれの解を頂点とする三角形は正三角形である。この正三角形の傍心を表す複素数をすべて求めなさい。ただし傍心とは外角の二等分線が交わる交点である。



　せっかくここまで作ったので傍接円を描いた図を載せておきます。目的の複素数の求め方はいろいろな解き方があるので省略しました。