

4.1.4 和の記号 $\sum$

数列の学習で $\sum$ を学ぶ。ただこのときお上^{かみ}の式が登場する。連続整数の累乗の差の式である。例えば自然数の平方和では $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$, 立方和では $k^4 - (k-1)^4 = 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1$ である。突然に出現する恒等式に抵抗を感じる生徒は少なくない。もっと自然にシグマの公式に接することができないのか, そんなことを感じました。

4.1.4.1 自然数の和

問. 次のような1から n までの自然数の和を求めなさい。

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$\sum$ を学習する前には等差数列の指導は終わっている。ほとんどの生徒は $S = \frac{1}{2}n(n+1)$ と答えるだろう。この問題を恒等式を用いて求めることから $\sum_{k=1}^n k$ の公式を感じさせたい。

$$k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1$$

k に1から n までを順に代入すると

$$k=1 \quad 1^2 - 0^2 = 2 \cdot 1 - 1$$

$$k=2 \quad 2^2 - 1^2 = 2 \cdot 2 - 1$$

$$k=3 \quad 3^2 - 2^2 = 2 \cdot 3 - 1$$

.....

$$k=n \quad n^2 - (n-1)^2 = 2 \cdot n - 1$$

これら n 個の等式の辺々加えると

$$n^2 = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) - n$$

$$n^2 = 2S - n$$

$$2S = n^2 + n$$

$$S = \frac{1}{2}n(n+1)$$

4.1.4.2 自然数の平方和と立方和

自然数の和を恒等式を用いて解く方法を学習した後, 平方和と立方和の指導になる。こちらは教科書に記述があるのでそちらを参照してほしい。とはいっても流れとして教材のまとめの式ぐらいないと体裁が悪いので書かせていただきたい。

1. 平方和

問. 次のような1から n までの自然数の平方和を求めなさい。

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

$$S = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

2. 立方和

問. 次のような1から n までの自然数の立方和を求めなさい。

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

$$S = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

4.1.4.3 自然数の4乗和

計算がやや大変だが、生徒の実態に応じて次の4乗和に挑戦させるのもいいだろう。因数分解で $2n+1$ の因数が登場するのでいい復習になる。

問. 次のような1から n までの自然数の4乗和を求めなさい。

$$S = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4$$

$$k^5 - (k-1)^5 = 5k^4 - 10k^3 + 10k^2 - 5k + 1$$

k に1から n までを順に代入すると

$$k=1 \quad 1^5 - 0^5 = 5 \cdot 1^4 - 10 \cdot 1^3 + 10 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 1$$

$$k=2 \quad 2^5 - 1^5 = 5 \cdot 2^4 - 10 \cdot 2^3 + 10 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 1$$

$$k=3 \quad 3^5 - 2^5 = 5 \cdot 3^4 - 10 \cdot 3^3 + 10 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 1$$

.....

$$k=n \quad n^5 - (n-1)^5 = 5 \cdot n^4 - 10 \cdot n^3 + 10 \cdot n^2 - 5 \cdot n + 1$$

これら n 個の等式の辺々加えると

$$\begin{aligned} n^5 &= 5(1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4) \\ &\quad - 10(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) \\ &\quad + 10(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \\ &\quad - 5(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n \end{aligned}$$

$$n^5 = 5S - 10 \sum_{k=1}^n k^3 + 10 \sum_{k=1}^n k^2 - 5 \sum_{k=1}^n k + n$$

$$5S = n^5 + 10 \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 - 10 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 5 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n$$

$$5S = \frac{n}{6} (6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1)$$

$$5S = \frac{n}{6} (n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)$$

$$5S = \frac{n}{6} (n+1) \left(n + \frac{1}{2} \right) (6n^2 + 6n - 2)$$

$$5S = \frac{n}{6} (n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$$

$$S = \frac{n}{30} (n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$$

$$\begin{array}{rrrrrr} & 6 & 15 & 10 & 0 & -1 & \left| \begin{array}{l} -1 \\ \hline \end{array} \right. \\ +) & & -6 & -9 & -1 & 1 & \\ \hline & 6 & 9 & 1 & -1 & 0 & \\ \\ & & 6 & 9 & 1 & -1 & \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \\ \hline \end{array} \right. \\ +) & & & -3 & -3 & 1 & \\ \hline & & 6 & 6 & -2 & 0 & \end{array}$$

生徒の実態にもよるが、計算終了時に達成感をかなり感じることができる課題である。指導法としてたいせつなことの1つに、教える教材の前後と生徒の実態を考え、教師自身がどこを指導するかを決めることである。教科書をみて立方和まで指導すればいいのか……，ではなくその前はどうかになっているのか，次は……という教師としての教材の見方を養うことである。