

4.2.3 二項分布と正規分布のグラフ (ダイス編)

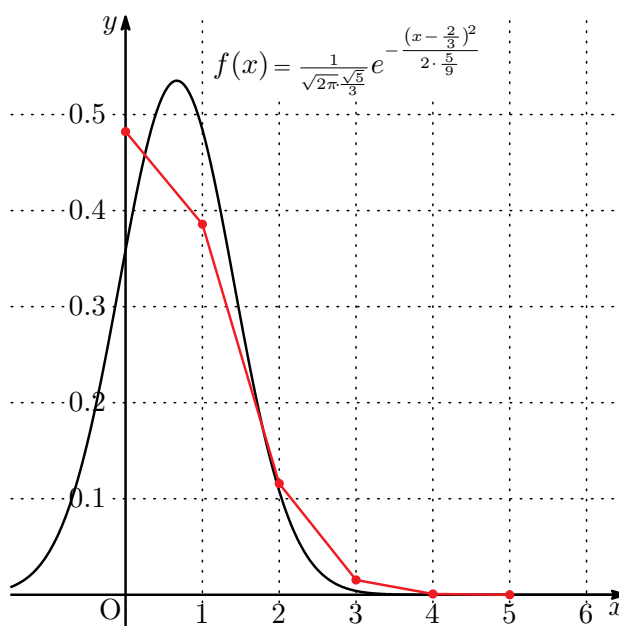
二項分布のグラフと正規分布のグラフがあまりにも天下りの感じがしたため生徒が取り組めるようにしました。コイン編とあわせてお読みください。

問. $B\left(4, \frac{1}{6}\right)$ の確率分布表を作ってみよう。

X	0	1	2	3	4	計
P	${}_4C_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4$ $= \frac{625}{1296}$ ≈ 0.482	${}_4C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3$ $= \frac{500}{1296}$ ≈ 0.386	${}_4C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$ $= \frac{150}{1296}$ ≈ 0.116	${}_4C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1$ $= \frac{20}{1296}$ ≈ 0.015	${}_4C_4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0$ $= \frac{1}{1296}$ ≈ 0.001	1 1 1

これを $E(X) = np$, $V(X) = npq$ を用いた正規分布 $N\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{9}\right)$ と比較させます。

問. $B\left(4, \frac{1}{6}\right)$ のグラフを作ってみよう。

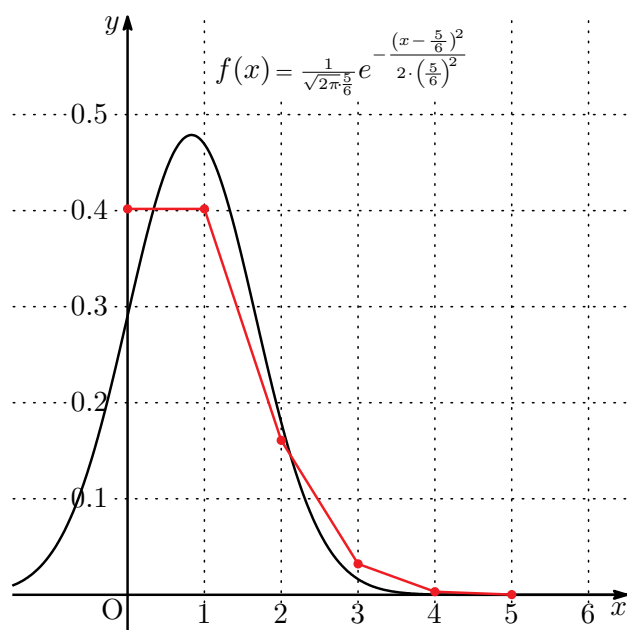


基本を学習した後, $B\left(5, \frac{1}{6}\right)$ と $B\left(6, \frac{1}{6}\right)$ のグラフに挑戦させます。

問. $B\left(5, \frac{1}{6}\right)$ の確率分布表を作ってみよう。

X	0	1	2	3	4	5	計
P	${}_5C_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^5$ $= \frac{3125}{7776}$ ≈ 0.402	${}_5C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^4$ $= \frac{3125}{7776}$ ≈ 0.402	${}_5C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3$ $= \frac{1250}{7776}$ ≈ 0.161	${}_5C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2$ $= \frac{250}{7776}$ ≈ 0.032	${}_5C_4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^1$ $= \frac{25}{7776}$ ≈ 0.003	${}_5C_5\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^0$ $= \frac{1}{7776}$ ≈ 0.000	1 1 1

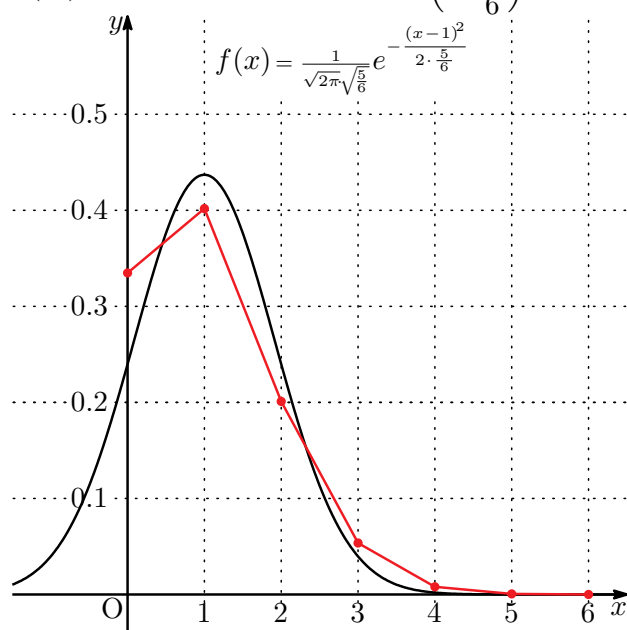
これを $E(X) = np$, $V(X) = npq$ を用いた正規分布 $N\left(\frac{5}{6}, \left(\frac{5}{6}\right)^2\right)$ と比較させます。



問. $B\left(6, \frac{1}{6}\right)$ の確率分布表を作ってみよう。

X	0	1	2	3	4	5	6	計
P	${}_6C_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6$	${}_6C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^5$	${}_6C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4$	${}_6C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3$	${}_6C_4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2$	${}_6C_5\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^1$	${}_6C_6\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^0$	1
	$= \frac{15625}{46656}$	$= \frac{18750}{46656}$	$= \frac{9375}{46656}$	$= \frac{2500}{46656}$	$= \frac{375}{46656}$	$= \frac{30}{46656}$	$= \frac{1}{46656}$	1
	≈ 0.335	≈ 0.402	≈ 0.201	≈ 0.054	≈ 0.008	≈ 0.001	≈ 0.000	1.001

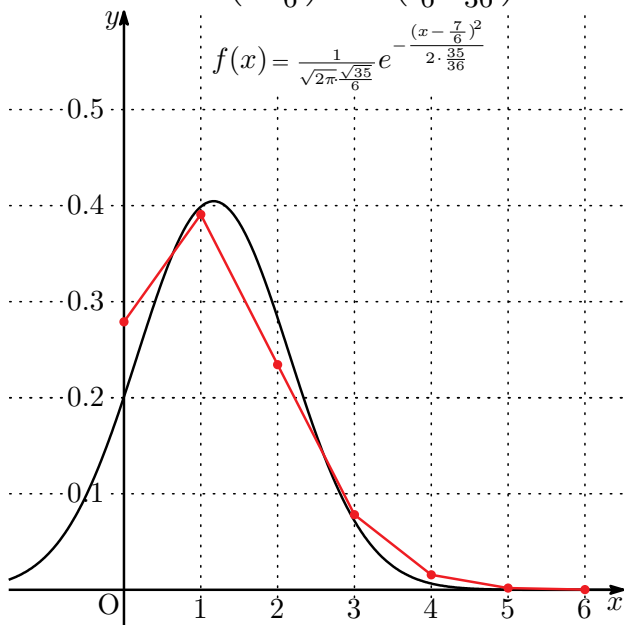
これを $E(X) = np$, $V(X) = npq$ を用いた正規分布 $N\left(1, \frac{5}{6}\right)$ と比較させます。



二項分布において n を十分に大きくしなければ正規分布における近似は成り立ちません。初期段階において自分で求めた値と比較した後、 n を大きくした二項分布と正規分布を重ね合わせたグラフを見せた方が理解しやすいと思い作成しました。以下は生徒の実態に合わせて紹介という形で考察させればよいと思います。

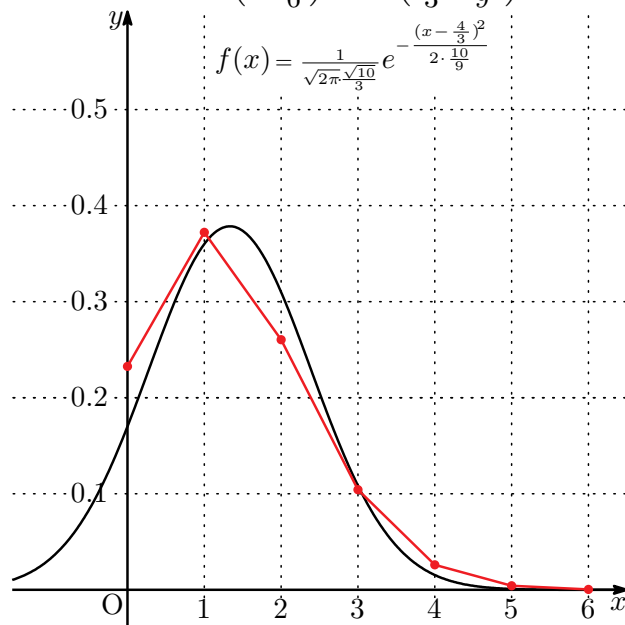
$$B\left(7, \frac{1}{6}\right) \text{ と } N\left(\frac{7}{6}, \frac{35}{36}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{35}{36}}} e^{-\frac{(x - \frac{7}{6})^2}{2 \cdot \frac{35}{36}}}$$



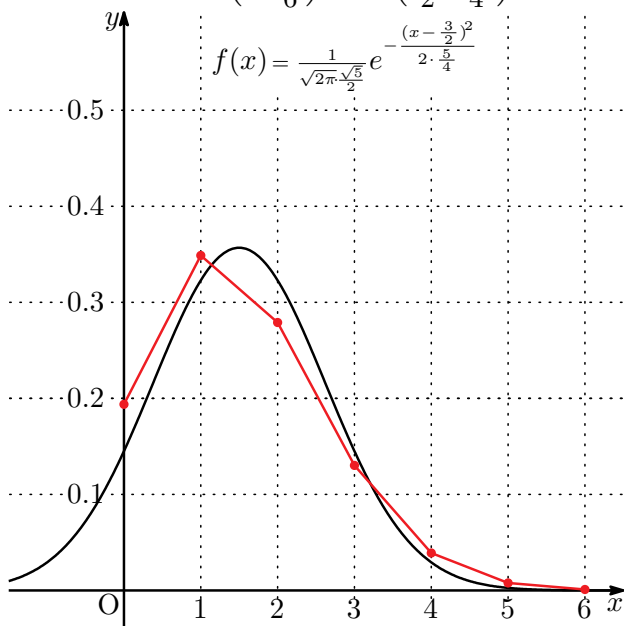
$$B\left(8, \frac{1}{6}\right) \text{ と } N\left(\frac{4}{3}, \frac{10}{9}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{10}{9}}} e^{-\frac{(x - \frac{4}{3})^2}{2 \cdot \frac{10}{9}}}$$



$$B\left(9, \frac{1}{6}\right) \text{ と } N\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{5}{4}}} e^{-\frac{(x - \frac{3}{2})^2}{2 \cdot \frac{5}{4}}}$$



$$B\left(10, \frac{1}{6}\right) \text{ と } N\left(\frac{5}{3}, \frac{25}{18}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{25}{18}}} e^{-\frac{(x - \frac{5}{3})^2}{2 \cdot \frac{25}{18}}}$$

