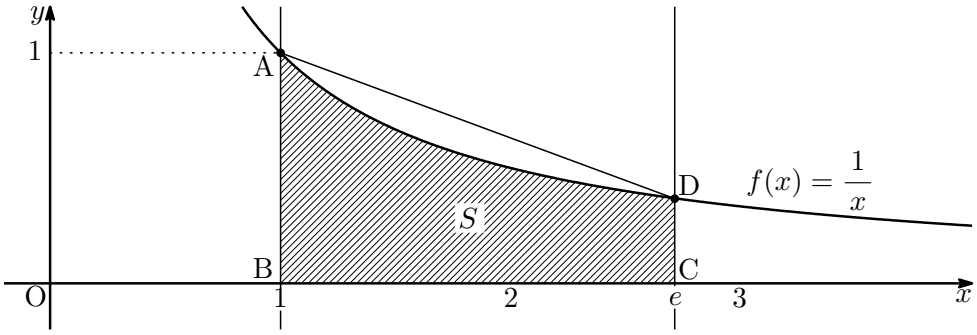
4.2.1　自然対数の底 e

数学の世界において自然対数の底の e は円周率 π と並ぶ数にもかかわらず，ほとんどの生徒がその数に近づくことができないのでわずかであるが e を感じる教材を開発してみた。まず e の定義にはいろいろあるが生徒にとって最もわかりやすいのは反比例のグラフからの定義だと思う。反比例の $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフにおいて $x=1$ から x 軸とグラフで囲まれる面積 S が 1 になる数を e と定義して求めていく。(下図参照)

$$\left(\int_1^e \frac{1}{x}dx = \Big[\log x\Big]_1^e = \log e = 1 \right)$$

(1) 1 領域



最初に台形 ABCD の面積で求めたい面積 S を近似してその x 座標を求めてみる。上底を CD，下底を AB として，求めたい e の x 座標を k とすると高さは $k-1$ になることより

$$S=\left(\frac{1}{k}+1\right)\times(k-1)\times\frac{1}{2}=\frac{k^2-1}{2k}$$

この面積が 1 になることから　$\dfrac{k^2-1}{2k}=1$

$$k^2-2k-1=0$$

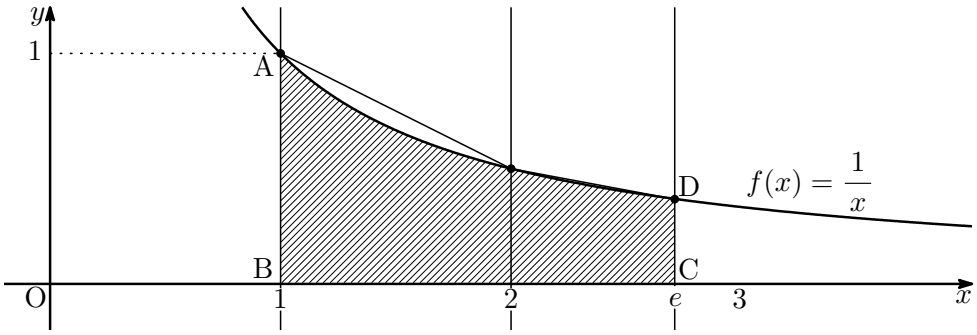
$$k=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}$$

$k>0$ より

$$k=1+\sqrt{2}\fallingdotseq 2.414213562\cdots\cdots$$

実際の e の値は 2.7182818284……なのでまだまだという感じ。さぁこれを出発点としてどこまで真の値に迫ることができるか挑戦開始である。

(2) 2 領域



$x=2$ の直線を追加し 2 分割して計算してみる。まず面積 S は

$$S=\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\right)\times(k-2)\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+1\right)\times1\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{k^2-4}{4k}+\frac{3}{4}$$

この面積が 1 になることから　$\dfrac{k^2-4}{4k}+\dfrac{3}{4}=1$

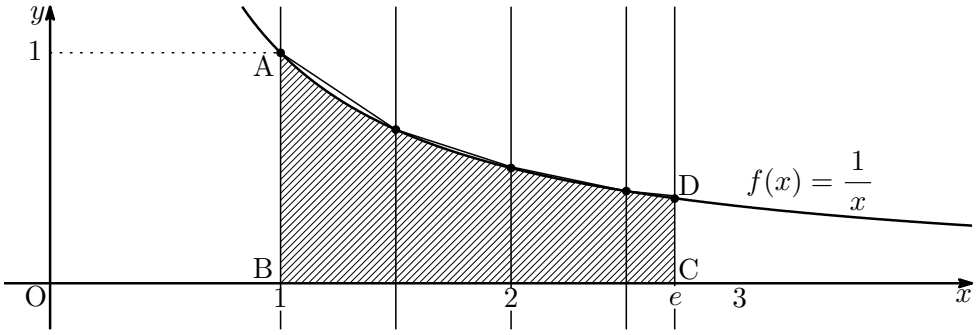
$k^2-k-4=0$

$k=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1}$

$k>0$ より　$=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\fallingdotseq 2.561552813\cdots\cdots$

まだまだだが，それでも近づいてはきている。さらに進めてみよう。

(3) 4 領域



$x=\dfrac{3}{2}$ と $x=\dfrac{5}{2}$ の直線を追加し 4 分割して計算してみる。まず面積 S は

$S=\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{2}{5}\right)\times\left(k-\dfrac{5}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\right)\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{2}{3}+1\right)\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{4k^2-25}{20k}+\dfrac{14}{15}$

この面積が 1 になることから　$\dfrac{4k^2-25}{20k}+\dfrac{14}{15}=1$

$12k^2-4k-75=0$

$k=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot12\cdot(-75)}}{2\cdot12}$

$k>0$ より　$=\dfrac{1+\sqrt{226}}{2}\fallingdotseq 2.672216063\cdots\cdots$

いい感じになってきた。もうひとがんばりが必要みたいだ。これ以降は必要な情報のみでグラフは省略する。

(4) 7 領域

$x=\dfrac{5}{4}$ と $x=\dfrac{7}{4}$ と $x=\dfrac{9}{4}$ の直線を追加し 7 分割して計算してみる。まず面積 S は

$S=\dfrac{4k^2-25}{20k}+\dfrac{58}{63}$

この面積が 1 になることから　$\dfrac{4k^2-25}{20k}+\dfrac{58}{63}=1$

$252k^2-100k-1575=0$

$k>0$ より　$k\fallingdotseq 2.706273859\cdots\cdots$

誤差は 0.01200796984……である。まだ満足とはいえないが生徒の実態を考えると十分かもしれない。この後を書いておくと $x=\dfrac{9}{8},\dfrac{11}{8},\dfrac{13}{8},\dfrac{15}{8},\dfrac{17}{8},\dfrac{19}{8}$ を追加し 13 個の領域での近似値は 2.715061266……，25 領域では 2.71727674152……となった。やればやるだけ真の値に近づくので生徒の実態に合わせて競争させるのもいいかもしれない。

最後に e について書いておこう。数 e はジョン・ネイピア (1550-1617) が自然対数の底として発見したため，その功績から日本ではネイピア数と言われていた時期があった。しかし世界の大勢はオイラー数とよんでいる。これはオイラー (Leonhard Euler 1707-1783) によって対数が再定義されためで e はオイラーの頭文字である。しかしオイラー数といっても何を示すのかが問題になるほどオイラーの功績があまりにも偉大であるため現在の日本では"自然対数の底"という言い方が主流である。

【教材の注意】

分割を細かくしていくと $\dfrac{5}{2} < x < e$ の間に分割線を引くことができることに気がつく。しかしこの部分を細かく分割すると k を用いた台形の高さが変わってしまうため 2 次方程式の形がかなり複雑な形になってしまう。対象が高校生なので分割線は $1 < x < \dfrac{5}{2}$ の間に限定して取り組ませた方がいいと感じた。