2.3.6　(m,k)-完全数

数 n がそこにあるとき，必ずその数の約数及び約数の和が存在する。その数の約数がある性質をもつときにはその数にその性質の名前が与えられる。例えば約数の個数がそれ以前のどの数よりも多くなる数には高度合成数，約数の和がそれ以前のどの数よりも大きくなる数には高度過剰数といった具合である。

2.3.6.1　完全数

約数の和が自身の 2 倍になる完全数という数がある。式で表すと σ（シグマ）を約数関数とするとき

$$\sigma(n) = 2n$$

が成り立つ数である。

例えば 2 の約数は 1, 2 で，約数の和は 3 になり元の数 2 と比べると 1.5 倍になるので完全数ではない。最小の完全数は 6 である。6 の約数は 1, 2, 3, 6 で，約数の和は 12 になり $6 \times 2 = 12$ なので完全数である。完全数は自身を除く約数の和が自身になる数と定義しても同値である。完全数の歴史は古くユークリッドは $2^p - 1$ (p は素数) が素数ならば $2^{p-1}(2^p - 1)$ は完全数になる証明を与えているし，18 世紀の数学者レオンハルト・オイラーは偶数の完全数はこの形に限る証明を与えている。

2.3.6.2　メルセンヌ素数と超完全数

完全数は 6, 28, 496, 8128…でかなり少ない。現在 (2023 年 4 月) でも 51 個しかみつかっていない。$2^n - 1$ の形で表せるメルセンヌ数が素数のときこの数をメルセンヌ素数というが，このとき $2^{n-1}(2^n - 1)$ が完全数になるのである。現在発見されている最大のメルセンヌ素数は 2018 年 12 月に GIMPS が発見した $2^{82589933} - 1$ なので現在の最大の完全数は $2^{82589932} \times (2^{82589933} - 1)$ で約 5000 万桁の数である。

先の例では 1 をとばしたが，1 の約数は 1 だけなので当然約数の和は 1 になる。1 は

$$\sigma(n) = n$$

が成り立つ唯一の数である。このことは 1 を除くすべての数が 1 を約数にもつので簡単に示すことができる。また 2 回約数を求めると自身の 2 倍になる数は超完全数という。完全数は (超完全数)×(メルセンヌ素数) で表される数である。

2.3.6.3　(m,k)-完全数

ここで 2 の約数の和 3 に注目しよう。2 の約数の和 3 は 2 の倍数でないことは明白であるが，3 の約数の和は 4 になるので，2 は 2 回連続で約数の和を求めると自身の 2 倍の数になる。よって 2 は最小の超完全数である。m 回約数の和を連続で求めて初めて自身の数 n の k 倍になる数を (m,k)-完全数とよぶことにする。数式で表すと

$$\sigma^m(n) = kn$$

であり，超完全数 2 は $(2,2)$-完全数である。既知の完全数は $(1,2)$-完全数であるし，1 は $(1,1)$-完全数である。ではこの m と k を調べてみよう。

n	約数の和	m	k	備　考
2	$2 \to 3 \to 4$	2	2	超完全数
3	$3 \to 4 \to 7 \to 8 \to 15$	4	5	メルセンヌ素数
4	$4 \to 7 \to 8$	2	2	超完全数
5	$5 \to 6 \to 12 \to 28 \to 56 \to 120$	5	24	
6	$6 \to 12$	1	2	完全数
7	$7 \to 8 \to 15 \to 24 \to 60 \to 168$	5	24	メルセンヌ素数
8	$8 \to 15 \to 24$	2	3	
9	$9 \to 13 \to 14 \to 24 \to 60 \to 168 \to 480 \to 1512$	7	168	
10	$10 \to 18 \to 39 \to 56 \to 120$	4	12	

となり，どうやら整数 n を決めればいつかは自身の整数倍になるようである。本当だろうか？次の 11 は少し苦労が必要である。

$11 \to 12 \to 28 \to 56 \to 120 \to 360 \to 1170 \to 3276 \to 10192 \to 24738 \to 61440 \to 196584 \to 491520 \to 1572840 \to 5433480 \to 20180160$

となり 15 回目でようやく自身 11 の倍数になり，11 は $(15, 1834560)$-完全数ということがわかる。

調べていくと 29 は 78 回目で 517517500266693633076805172570524811961093324800 倍になることがわかる。自分は U − BASIC を使って計算したが 76 回目で約数の和を求めるため，素因数を求める内部組み込み関数 $prmdiv$ が素因数をみつけることができない 0 の値を返してきた。そのため別方法で素因数を与えるプログラムが必要になったほどである。

ここで，ある数 n を考えたとき，n が何回で自身の実数倍になるのだろう。以下の表に回数 m がその数以前の数より大きくなる n をまとめておいた。

順	n	m	順	n	m	順	n	m	順	n	m	順	n	m	順	n	m
①	1	1	⑥	11	15	⑪	67	101	⑯	239	261	㉑	659	1287	㉖	2797	2373
②	2	2	⑦	23	16	⑫	101	120	⑰	353	263	㉒	1319	1524	㉗	3229	2466
③	3	4	⑧	25	17	⑬	131	174	⑱	389	296	㉓	1579	1722	㉘	3517	2478
④	5	5	⑨	29	78	⑭	173	214	⑲	401	380	㉔	1847	1911	㉙	3967	2481
⑤	9	7	⑩	59	97	⑮	202	239	⑳	461	557	㉕	2309	2023	㉚	4003	不明

この n は現在オンライン整数列大辞典には 26 個登録 ($A019276$) されている。それぞれの n の値に対応する m の値はまだ 1578 までしか登録されていない。($A019294$) 1579 以降は自分の計算結果であることを付け加えておく。㉚は 4003 であると予想されるが，現在 2318 回で計算が止まっている。(301 桁の素因数分解できない数があるために約数の和を求めることができない。)

どの数だって約数の和は自身の整数倍になるのである。ただ求める約数の和の回数が異なるだけなのである。何かに挑戦したときすぐにできてしまう人と努力に努力を重ねてできる人がいる。数だって同じなんだということを感じさせてくれた。

教科書にある素因数分解を用いた約数の和の計算だけで授業を構成してもいい。しかしそこで教科書のコラムに書かれてある完全数だけでなく (m, k)-完全数を紹介することによって，生徒に数の世界を体感させることも大切だと感じる。12 の約数の和は 2 番目の完全数 28 になる。数個の具体例から 12 までの (m, k)-完全数を求めさせれば 11 の (m, k)-完全数を求めるときには，11 の倍数の見分け方も必要になってくる。求めることの困難さと自力で求めることができた達成感も充分に味わせることもできる。

2.3.6.4 (完全数) = (超完全数)×(メルセンヌ素数)

2024 年 10 月 21 日素数探索プロジェクト「GIMPS」は新たな最大素数が発見されたと発表しました。その数は 41024320 桁の数でした。

$$2^{136279841}-1$$

今回みつかったメルセンヌ素数から求めることができる完全数は

$$2^{136279840}\cdot(2^{136279841}-1)$$

です。桁数は 82048640 桁です。現代では完全数になるときの 2^{n-1} の数を超完全数，2^n-1 の数をメルセンヌ素数といいます。超完全数は約数の和を求めるとメルセンヌ素数になり，続けて 2 回目の約数の和を求めると自身の 2 倍になる数です。約数関数 σ を用いてこの数を表すと $\sigma^2(n)=2n$ を満たす数を超完全数と定義できます。

数学教師として知っていてほしい完全数にまつわる性質を考えてみます。

2.3.6.5 どうしてメルセンヌ数 2^n-1 が素数になると完全数がみつかるの？

『ユークリッド原論』第 9 巻 命題 36 からの言葉を引用しましょう。当時は無限和 ($\cdots$ を用いた式) なんて存在しない時代です。

> 「もし単位から始まり順次に 1 ： 2 の比をなす任意個の数が定められ，それらの総和が素数になるようにされ，そして全体が最後の数にかけられてある数をつくるならば，その数は完全数であろう。」

上の文は現代では次のように置き換えられます。

$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=M_n$ が素数ならば $M_n\times 2^{n-1}$ は完全数になる。

証明してみましょう。

M_n は初項 1，公比 2 の等比数列の和なので

$$\begin{aligned}M_n&=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}\\&=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}\\&=2^n-1\end{aligned}$$

ここで $N=2^{n-1}(2^n-1)$ とする。$(n\geqq 2)$

素数 P の約数の和は $P+1$ になるので

2^n-1 が素数ならば σ を約数関数として $\sigma(2^n-1)=2^n$ になる。

2^{n-1} の約数の和は初項 1，公比 2 の等比数列の和 (M_n) なので

$$\sigma(2^{n-1})=\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$$

よって N の約数の和 $\sigma(N)$ は

$$\begin{aligned}\sigma(N)&=\sigma(2^{n-1}\cdot(2^n-1))\\&=\sigma(2^{n-1})\cdot\sigma(2^n-1)\\&=(2^n-1)\cdot 2^n\\&=2\cdot 2^{n-1}\cdot(2^n-1)\\&=2N\end{aligned}$$

メルセンヌ素数は整数列大辞典 $A000668$ にあります。

$$3,\ 7,\ 31,\ 127,\ 8191,\ 131071,\ 524287,\ 2147483647,\cdots$$

2.3.6.6　メルセンヌ素数をつくる指数の数はどうして素数なの？

メルセンヌ素数をつくる指数の数は素数でなければならない証明です。証明というほどたいそうなものではありませんが指数が合成数になった場合は因数分解できることは数学 II のレベルでわかるようになります。

$$\begin{aligned}&2^{ab}-1\\&=(2^a-1)(1+2^a+2^{2a}+\cdots+2^{(b-1)a})\end{aligned}$$

分配法則を用いてかっこをはずすと

$$\begin{array}{rl}&2^a+2^{2a}+2^{3a}+\cdots+2^{(b-1)a}+2^{ba}\\ +)&-1-2^a-2^{2a}-2^{3a}-\cdots-2^{(b-1)a}\\ \hline &-1\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +2^{ba}\end{array}$$

数学 II の二項定理と数学 B の数列を学習しないとイメージがつかめないかもしれません。$b=3$ (指数が 3 の倍数) のときの式を書いておきます。

$$\begin{aligned}&2^{3a}-1\\&=(2^a)^3-1\\&=(2^a-1)\{(2^a)^2+2^a+1\}\\&=(2^a-1)(1+2^a+2^{2a})\end{aligned}$$

メルセンヌ素数を作る指数の素数は整数列大辞典 $A000043$ にあります。

$$2,3,5,7,13,17,19,31,61,89,107,\cdots$$

2.3.6.7　完全数が三角数なのはなぜ？

完全数はすべて自然数を順に加えてできる三角数です。

$$\begin{aligned}6&=1+2+3\\28&=1+2+3+4+5+6+7\\496&=1+2+3+4+5+6+7+8+9+\cdots+31\end{aligned}$$

どうしてでしょう？ 現在発見されている完全数はすべて偶数で $2^{p-1}(2^p-1)$ の形です。奇数の完全数は発見されていないので完全数はこの数式の形の数ということで話を進めていきます。

三角数は数学 B で学習する $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ で表せます。

では完全数を導き出すことができる $2^{n-1}(2^n-1)$ はこの形になるのか，やってみましょう。

$$M=2^n-1 \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned}2^n&=M+1\\2^{n-1}&=\frac{M+1}{2}\\2^{n-1}\cdot(2^n-1)&=\frac{M+1}{2}\cdot M\\&=\frac{M(M+1)}{2}\end{aligned}$$

式は全く異なるのに完全数の $2^{n-1}(2^n-1)$ から求めることができる数はすべて三角数の中に含まれることを示すことができました。三角数は整数列大辞典 $A000217$ にあります。

$$1,3,\mathbf{6},10,15,21,\mathbf{28},36,45,55,66,78,91,105,120,136,153,\cdots$$

2.3.6.8　完全数と奇数の立方和

完全数は最初の 6 を除いて奇数の立方和で表される性質があります。例えば

$$28 = 1^3 + 3^3$$
$$496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$$

です。どうして 6 以外の完全数は奇数の立方和で表せるのでしょうか？

奇数の立方和は
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 &= \sum_{k=1}^{n}(8k^3 - 12k^2 + 6k - 1)\\
&= 8\sum_{k=1}^{n}k^3 - 12\sum_{k=1}^{n}k^2 + 6\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1\\
&= 8\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 - 12\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n\\
&= 2n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) - n\\
&= n\{2n(n+1)^2 - 2(n+1)(2n+1) + 3(n+1) - 1\}\\
&= n(2n^3 + 4n^2 + 2n - 4n^2 - 6n - 2 + 3n + 3 - 1)\\
&= n(2n^3 - n)\\
&= n^2(2n^2 - 1)\end{aligned}$$

この式で表される数が奇数の立方和になります。では完全数を表す数式 $2^{n-1}(2^n - 1)$ はこの形になるのか，やってみましょう。

p を $p \geqq 3$ の素数とすると
$2^{p-1}\cdot(2^p - 1) = 2^{p-1}\cdot(2\cdot 2^{p-1} - 1)$
メルセンヌ素数の指数は素数と $p \geqq 3$ より $p - 1$ は偶数である。
$p - 1 = 2m$ とすると
$$= 2^{2m}\cdot(2\cdot 2^{2m} - 1))$$
$$= (2^m)^2\cdot\{2\cdot(2^m)^2 - 1\}$$
ここで $2^m = n$ とおくと
$$= n^2(2n^2 - 1)$$

ここで疑問が浮かびます。どうして 6 は奇数の立方和で表すことのできない唯一の完全数なのでしょう。数式から考察してみましょう。

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = n^2(2n^2 - 1) \text{ より}$$
ここで n^2 を m とおくと
$$a_m = m(2m - 1)$$

ここで $m = 2^{p-1}$ とすると完全数を表す式になります。完全数 6 の場合は $m = 2$ より $n^2 = 2$ から $n > 0$ より $n = \sqrt{2}$ になり，整数にならないことから奇数の立方和で表すことができません。この奇数の立方和の式 $n^2(2n^2 - 1)$ に $n = 2^{\frac{p-1}{2}}$ を代入すると完全数を求める標準形の式になります。$\dfrac{p-1}{2} \geqq 1$ から $p \geqq 3$ が導きだされることからも 6 は含まないこともわかります。この奇数の立方和 (すべて三角数) の数列は整数列大辞典 $A002593$ にあります。

1, **28**, 153, **496**, 1225, 2556, 4753, **8128**, 13041, $\cdots$