3.1.2　数表を使って授業しよう！

数表を使って九九に登場する数や素数，累乗数，楔数等を紹介してきたが，高校生にはもう少し高級感のある課題を選んでみた。授業で扱ってもいいのだがやや時間がかかると思う。課題学習としてどうだろう。

3.1.2.1　異なる数の平方和で表せる整数

> 問. 自然数を平方の和で表すことに挑戦します。例えば 14 は $1^2+2^2+3^3$ と表すことができます。$1^2, 2^2, 3^2, 4^2$ の 4 種類を使ってでどんな数が表すことができるか調べなさい。ただし同じ平方数を 2 回使ってはいけません。

問題の意味をつかませる課題です。これは簡単ですね。

1 種類　$1^2=\underline{1},\ 2^2=\underline{4},\ 3^2=\underline{9},\ 4^2=\underline{16}$
2 種類　$1^2+2^2=\underline{5},\ 1^2+3^2=\underline{10},\ 1^2+4^2=\underline{17},\ 2^2+3^2=\underline{13},\ 2^2+4^2=\underline{20},\ 3^2+4^2=\underline{25}$
3 種類　$1^2+2^2+3^2=\underline{14},\ 1^2+2^2+4^2=\underline{21},\ 1^2+3^2+4^2=\underline{26},\ 2^2+3^2+4^2=\underline{27}$
4 種類　$1^2+2^2+3^2+4^2=\underline{30}$

といったことで 15 個の数が表すことができるとわかりました。問題の意味がわかったここからが本時のスタートです。

> 問. 15 個の数が表すことがわかったんだけど，5^2 を使ってもいいとすると何個増えるんだろう？

1 種類　$5^2=25$
2 種類　$5^2+1^2=26$　$5^2+2^2=29$　$5^2+3^2=\underline{34}$　$5^2+4^2=\underline{41}$
3 種類　$5^2+1^2+2^2=30$　$5^2+1^2+3^2=\underline{35}$　$5^2+1^2+4^2=\underline{42}$　$5^2+2^2+3^2=\underline{38}$
$5^2+2^2+4^2=\underline{45}$　$5^2+3^2+4^2=\underline{50}$
4 種類　$5^2+1^2+2^2+3^2=\underline{39}$　$5^2+1^2+2^2+4^2=\underline{46}$
$5^2+1^2+3^2+4^2=\underline{51}$　$5^2+2^2+3^2+4^2=\underline{54}$
5 種類　$5^2+1^2+2^2+3^2+4^2=\underline{55}$

調べた数は 16 個だったけど，前に出てきた数が 4 個あったから 12 個増えて 27 個が正解なんだけど，どうかな正解までたどり着けたかな。

> 問. もうすこしがんばってみようか，6^2 を使ってもいいとすると何個になるんだろう？

1 種類　$6^2=\underline{36}$
2 種類　$6^2+1^2=\underline{37}$　$6^2+2^2=\underline{40}$　$6^2+3^2=45$　$6^2+4^2=\underline{52}$
$6^2+5^2=\underline{61}$
3 種類　$6^2+1^2+2^2=41$　$6^2+1^2+3^2=46$　$6^2+1^2+4^2=\underline{53}$　$6^2+1^2+5^2=\underline{62}$
$6^2+2^2+3^2=\underline{49}$　$6^2+2^2+4^2=\underline{56}$　$6^2+2^2+5^2=\underline{65}$　$6^2+3^2+4^2=61$
$6^2+3^2+5^2=\underline{70}$　$6^2+4^2+5^2=\underline{77}$
4 種類　$6^2+1^2+2^2+3^2=50$　$6^2+1^2+2^2+4^2=\underline{57}$　$6^2+1^2+2^2+5^2=\underline{66}$
$6^2+1^2+3^2+4^2=62$　$6^2+1^2+3^2+5^2=\underline{71}$　$6^2+1^2+4^2+5^2=\underline{78}$
$6^2+2^2+3^2+4^2=65$　$6^2+2^2+3^2+5^2=\underline{74}$　$6^2+2^2+4^2+5^2=\underline{81}$
$6^2+3^2+4^2+5^2=\underline{86}$
5 種類　$6^2+1^2+2^2+3^2+4^2=66$　$6^2+1^2+2^2+3^2+5^2=\underline{75}$
$6^2+1^2+2^2+4^2+5^2=\underline{82}$　$6^2+1^2+3^2+4^2+5^2=\underline{87}$
$6^2+2^2+3^2+4^2+5^2=\underline{90}$
6 種類　$6^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=\underline{91}$

今度は 24 個増えて 51 個が正解でした。10^2 まで計算するとこの平方数を使った数の正体がわかるけど，時間内にはできないから出てきた数を数表にまとめてみましょう。(表 1 参照)

表 1

十＼一	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	○			○	○				○	○
10			○	○		○	○			○
20	○				○	○			○	○
30				○	○	○	○	○	○	○
40	○	○			○	○			○	○
50	○	○	○	○	○	○	○			
60	○	○			○	○				○
70	○			○	○		○	○		
80	○	○				○	○			○
90	○									

やってみて何か気がついたことあるかな？

・計算回数が 16 個,32 個と増えているけど，これって $2^4, 2^5$ じゃないの。

・まだ○をしてない数に 64 と 100 があるけどこれは簡単に表すことできる。

3.1.2.2　$1^2 \sim 7^2$ で表すことができる数

表 1′

十＼一	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	○	・	・	○	○	・	・	・	○	○
10	・	・	○	○	・	○	○	・	・	○
20	○	・	・	・	○	○	・	・	○	○
30	・	・	・	○	○	○	○	○	○	○
40	○	○	・	・	○	○	・	・	○	○
50	○	○	○	○	○	○	○	○	○	・
60	○	○	○		○	○	・		○	○
70	○	・		○	○	・	○	○	○	
80	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
90	○	・		○	○	・		○	○	○

表 2

十＼一	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
100	○	○	○	○	○	○		・		○
110	○	・		○	○				○	○
120			○	○		○	○	・		○
130	○				○	○				
140									○	○
150										
160										
170										
180										
190										

3.1.2.3　$1^2 \sim 8^2$ で表すことができる数

表 1″

十＼一	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	○	・	・	○	○	・	・	・	○	○
10	・	・	○	○	・	○	○	・	・	○
20	○	・	・	・	○	○	・	・	○	○
30	・	・	・	○	○	○	○	○	○	○
40	○	○	・	・	○	○	・	・	○	○
50	○	○	○	○	○	○	○	○	○	・
60	○	○	○	○	○	○	・	○	○	○
70	○	・	○	○	○	・	○	○	○	○
80	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
90	○	・	○	○	○	・		○	○	○

表 2′

十＼一	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
100	○	○	○	○	○	○		・	○	○
110	○	・	○	○	○	○	○	○	○	○
120	○	○	○	○	○	○	○	・	○	○
130	○		○	○	○	○		○	○	○
140	○	○	○		○	○	○	○	○	○
150	○	○	○	○	○			○	○	
160		○	○	○	○	○	○	○	○	○
170				○	○			○	○	
180			○	○			○	○		○
190	○			○	○				○	○

表 3

十＼一	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
200			○	○						
210										
220										
230										
240										
250										
260										
270										
280										
290										

3.1.2.4　$1^2 \sim 9^2$ で表すことができる数

表 1‴

十＼一	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	○	・	・	○	○	・	・	・	○	○
10	・	・	○	○	・	○	○	・	・	○
20	○	・	・	・	○	○	・	・	○	○
30	・	・	・	○	○	○	○	○	○	○
40	○	○	・	・	○	○	・	・	○	○
50	○	○	○	○	○	○	○	○	○	・
60	○	○	○	○	○	○	・	○	○	○
70	○	・	○	○	○	・	○	○	○	○
80	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
90	○	・	○	○	○	・	○	○	○	○

表 2″

十＼一	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
100	○	○	○	○	○	○	○	・	○	○
110	○	・	○	○	○	○	○	○	○	○
120	○	○	○	○	○	○	○	・	○	○
130	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
140	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
150	○	○	○	○	○	○		○	○	○
160	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
170	○	○		○	○	○		○	○	○
180	○	○	○	○	○	○	○	○		○
190	○	○		○	○	○	○	○	○	○

表 3′

十＼一	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
200	○	○	○	○	○	○	○	○		○
210	○	○		○	○	○	○		○	○
220	○	○	○	○		○	○	○	○	○
230	○	○	○	○	○	○			○	○
240			○	○	○	○	○	○	○	○
250	○				○	○			○	○
260				○	○			○	○	
270	○	○			○	○				○
280	○			○	○					
290										

3.1.2.5　$1^2 \sim 10^2$ で表すことができる数

表 $2'''$

十＼一	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
100	○	○	○	○	○	○	○	•	○	○
110	○	•	○	○	○	○	○	○	○	○
120	○	○	○	○	○	○	○	•	○	○
130	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
140	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
150	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
160	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
170	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
180	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
190	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

表 $3''$

十＼一	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
200	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
210	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
220	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
230	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
240	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
250	○	○	○	○	○	○		○	○	○
260	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
270	○	○		○	○	○		○	○	○
280	○	○	○	○	○	○	○	○		○
290	○	○		○	○	○	○	○	○	○

表 4

十＼一	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
300	○	○	○	○	○	○	○	○		○
310	○	○		○	○	○	○		○	○
320	○	○	○	○		○	○	○	○	○
330	○	○	○	○	○	○			○	○
340			○	○	○	○	○	○	○	○
350	○				○	○			○	○
360				○	○			○	○	
370	○	○			○	○				○
380	○			○	○					
390										

3.1.2.6　平方数を使って表すことができない最大整数 128

ここまでやると，平方数を使って表すことができない最大整数は 128 であることがわかる。というのは 10^2 までの考察で，129〜256 までの数が表すことができるので，これに 11^2 を加えた 250〜377 までの数は自動的に表すことが可能になる。よってこれ以降は 129〜377 までが表すことができる。今度はこれに 12^2 を加えた 273〜521 まで可能なので結果 129〜521 まで表すことができる。さらに 13^2 を……，といった具合である。

表すことができない数は 31 個あり，小さい順に $2, 3, 6, 7, 8, 11, 12, 15, 18, 19, 22, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 33, 43, 44, 47, 48, 60, 67, 72, 76, 92, 96, 108, 112, 128$ である。(整数列大辞典 $A001422$)

生徒の実態によってはこの最大数を考えさせても面白いと感じる。