3.1.3　高校生に挑戦させたい整数問題

問. 整数 15 は 10 を加えると a^2 となる平方数，28 を加えると b^2+b+1 の形で表せる数になります。ただし a, b は正の整数とします。このことについて以下の問いに答えなさい。

(1) 整数 15 のときの a, b の値を求めなさい。

(2) この性質をもつ正の整数は 15 を除くとあと一つあります。この整数を求めなさい。

(3) この性質をもつ正の整数は 15 と (2) で求めた整数しか存在しないことを証明しなさい。

(1) 解答

$$\begin{aligned} 15+10&=a^2 & 15+28&=b^2+b+1\\ a^2&=25 & b^2+b-42&=0\\ a&=\pm 5 & (b+7)(b-6)&=0\\ a>0 \text{ より } a&=5 & b&=6,-7\\ & & b>0 \text{ より } b&=6 \end{aligned}$$

(2) 解答　求める整数を n とする。与えられた条件を a, b を整数として式で表すと

$$\begin{aligned} n+10&=a^2 & n+28&=b^2+b+1\\ n&=a^2-10 & n&=b^2+b-27 \end{aligned}$$

(1) の a, b は $a=b-1$ の関係なので $a=b$ のときを求めると

$$\begin{aligned} a^2-10&=a^2+a-27\\ a&=17\\ \text{よって } n&=17^2-10\\ &=279 \end{aligned}$$

(3) 解答　10 を加えてできる整数を A，28 を加えてできる整数を B とすると題意より $A<B$ の関係が成り立つ。

(i) $a=b+k$ のとき (k は $k \geqq 1$ を満たす整数)

$$\begin{aligned} A=a^2&=(b+k)^2=b^2+2kb+k^2\\ B-A&=(b^2+b+1)-(b^2+2kb+k^2)\\ &=(1-2k)b+1-k^2\\ &\quad \text{ここで } k \geqq 1 \text{ より } 1-2k<0\,, 1-k^2 \leqq 0 \end{aligned}$$

$b>0$ なので $B-A<0$ になることから $A<B$ を満たさない

(ii) $a=b-k$ のとき (k は $k \geqq 0$ を満たす整数)

$b=a+k$ より

$$\begin{aligned} a^2-10&=(a+k)^2+(a+k)-27\\ a^2-10&=a^2+2ka+k^2+a+k-27\\ a&=\frac{-k^2-k+17}{2k+1}=\frac{-\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{69}{4}}{2k+1} \end{aligned}$$

上の式で $k=0$ とき $a=17\,(n=279), k=1$ とき $a=\dfrac{15}{3}=5\,(n=15)$ になる。$k=2$ のときは $a=\dfrac{11}{5}$ になりこれは a が整数という条件を満たさない。$k=3$ のときは $a=\dfrac{5}{7}$ になりこれも a が整数という条件を満たさない。$k=4$ のときは $a=\dfrac{-3}{9}=-\dfrac{1}{3}$ と負の数になり $a>0$ を満たさない。分子の式の形は $-k^2-k+17$ なのでこれ以降の数では a の値は負の数になる。これより 15 と 279 の 2 つの数だけしか存在しないことがわかる。//