6.3.4　正十七角形の頂点の座標の求め方

高校数学外伝 VIII「どうして正七角形は作図できないの？」の最後にその計算の大変さを感じるために式だけ載せました。あらためて詳しい解き方を高校生用にまとめました。

6.3.4.1　正十七角形の頂点の座標の求め方から正五角形の頂点の座標を求めるための 2 次方程式

正五角形の頂点を a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, として正十七角形の頂点を求める方法で解いていきましょう。この 5 つの値は方程式 $X^5-1=0$ の解です。

$$X^5-1=0$$
$$(X-1)(X^4+X^3+X^2+X+1)=0$$

ここで $a_0=1, a_i(i=1,2,3,4)$ を $X^4+X^3+X^2+X+1=0$ の解とします。求める解は正五角形の頂点なので，ド・モアブルの定理[1]より $a_i=a_1^i$ の関係にあります。

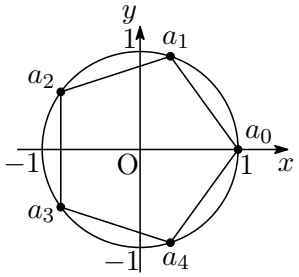
【第 1 段階】

$\alpha_1=a_1+a_4=a_1+a_1^4$

$\alpha_2=a_2+a_3=a_1^2+a_1^3$ とすると

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2&=(a_1+a_4)+(a_2+a_3)\\&=(a_1+a_1^4)+(a_1^2+a_1^3)\\&=a_1+a_1^2+a_1^3+a_1^4\\&=-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1\cdot\alpha_2&=(a_1+a_4)\cdot(a_2+a_3)\\&=(a_1+a_1^4)\cdot(a_1^2+a_1^3)\\&=a_1^3+a_1^4+a_1^6+a_1^7\\a_1^5=1\text{ より}\\&=a_1^3+a_1^4+a_1+a_1^2\\&=-1\end{aligned}$$



2 数 α_1, α_2 の解は 2 次方程式の解と係数の関係から

$$x^2+x-1=0$$

これより $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ より $\alpha_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\alpha_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

【第 2 段階】

$s=a_1+a_4=\alpha_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$t=a_1\cdot a_4=a_1\cdot a_1^4=a_1^5=1$

2 数 a_1, a_4 は 2 次方程式の解と係数の関係から

$$y^2-\alpha_1 y+1=0$$

これより $y=\dfrac{-(-\alpha_1)\pm\sqrt{(-\alpha_1)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\dfrac{\alpha_1\pm\sqrt{\alpha_1^2-4}}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i}{4}$

よって　$a_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i}{4}$, $a_4=\dfrac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i}{4}$

この方法で a_2 と a_3 を求めるには

$u=a_2+a_3=\alpha_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $v=a_2\cdot a_3=a_1^2\cdot a_1^3=a_1^5=1$

から $z^2-\alpha_2 z+1=0$ の 2 次方程式を解けばいいことがわかります。

$$a_2=\frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,i}{4}, a_3=\frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,i}{4}$$

[1] $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ (n は整数)

6.3.4.2　正十七角形の頂点の座標を求めるための 2 次方程式

正十七角形の頂点を a_0, a_1, a_2, $\cdots$ a_{16}, として正十七角形の頂点を求めていきましょう。このとき求める 17 個の値は方程式 $X^{17}-1=0$ の解です。

$$X^{17}-1=0$$
$$(X-1)(X^{16}+X^{15}+\cdots+X^2+X+1)=0$$

ここで $a_0=1, a_i(i=1,2,3,\cdots,16)$ を $X^{16}+X^{15}+\cdots+X^2+X+1=0$ の解とします。

【第 1 段階】

$\alpha_1=a_1+a_{16}+a_4+a_{13}+a_2+a_{15}+a_8+a_9$

$\alpha_2=a_3+a_{14}+a_5+a_{12}+a_6+a_{11}+a_7+a_{10}$ とすると

$\alpha_1+\alpha_2=(a_1+a_{16}+a_4+a_{13}+a_2+a_{15}+a_8+a_9)+(a_3+a_{14}+a_5+a_{12}+a_6+a_{11}+a_7+a_{10})$

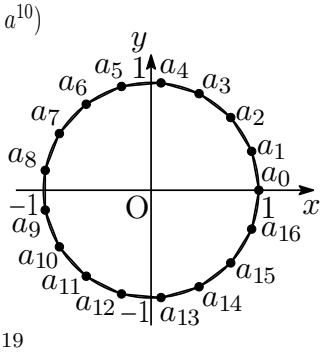
$a_i=a^i$ より

$$=(a^1+a^{16}+a^4+a^{13}+a^2+a^{15}+a^8+a^9)+(a^3+a^{14}+a^5+a^{12}+a^6+a^{11}+a^7+a^{10})$$
$$=\sum_{i=1}^{16}a^i=-1$$

$\alpha_1\cdot\alpha_2=(a_1+a_{16}+a_4+a_{13}+a_2+a_{15}+a_8+a_9)\cdot(a_3+a_{14}+a_5+a_{12}+a_6+a_{11}+a_7+a_{10})$

$a_i=a^i$ より

$$=(a+a^{16}+a^4+a^{13}+a^2+a^{15}+a^8+a^9)\cdot(a^3+a^{14}+a^5+a^{12}+a^6+a^{11}+a^7+a^{10})$$
$$=a^4+a^{15}+a^6+a^{13}+a^7+a^{12}+a^8+a^{11}$$
$$+a^{19}+a^{30}+a^{21}+a^{28}+a^{22}+a^{27}+a^{23}+a^{26}$$
$$+a^7+a^{18}+a^9+a^{16}+a^{10}+a^{15}+a^{11}+a^{14}$$
$$+a^{16}+a^{27}+a^{18}+a^{25}+a^{19}+a^{24}+a^{20}+a^{23}$$
$$+a^5+a^{16}+a^7+a^{14}+a^8+a^{13}+a^9+a^{12}$$
$$+a^{18}+a^{29}+a^{20}+a^{27}+a^{21}+a^{26}+a^{22}+a^{25}$$
$$+a^{11}+a^{22}+a^{13}+a^{20}+a^{14}+a^{19}+a^{15}+a^{18}$$
$$+a^{12}+a^{23}+a^{14}+a^{21}+a^{15}+a^{20}+a^{16}+a^{19}$$



$a^{17}=1$ より

$$=a^4+a^{15}+a^6+a^{13}+a^7+a^{12}+a^8+a^{11}$$
$$+a^2+a^{13}+a^4+a^{11}+a^5+a^{10}+a^6+a^9$$
$$+a^7+a+a^9+a^{16}+a^{10}+a^{15}+a^{11}+a^{14}$$
$$+a^{16}+a^{10}+a+a^8+a^2+a^7+a^3+a^6$$
$$+a^5+a^{16}+a^7+a^{14}+a^8+a^{13}+a^9+a^{12}$$
$$+a+a^{12}+a^3+a^{10}+a^4+a^9+a^5+a^8$$
$$+a^{11}+a^5+a^{13}+a^3+a^{14}+a^2+a^{15}+a$$
$$+a^{12}+a^6+a^{14}+a^4+a^{15}+a^3+a^{16}+a^2$$
$$=4\sum_{i=1}^{16}a^i=-4$$

2 数 α_1, α_2 の解は 2 次方程式の解と係数の関係から

$$x^2+x-4=0$$
$$\text{これより } x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$$
$$\alpha_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2},\ \alpha_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

【第 2 段階】

$s = a_1 + a_{16} + a_4 + a_{13}$

$t = a_2 + a_{15} + a_8 + a_9$

$u = a_3 + a_{14} + a_5 + a_{12}$

$v = a_6 + a_{11} + a_7 + a_{10}$ とすると

$$s + t = (a_1 + a_{16} + a_4 + a_{13}) + (a_2 + a_{15} + a_8 + a_9) = \alpha_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$u + v = (a_3 + a_{14} + a_5 + a_{12}) + (a_6 + a_{11} + a_7 + a_{10}) = \alpha_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{aligned} s \cdot t &= (a_1 + a_{16} + a_4 + a_{13}) \cdot (a_2 + a_{15} + a_8 + a_9) \\ &= (a + a^{16} + a^4 + a^{13}) \cdot (a^2 + a^{15} + a^8 + a^9) \\ &= a^3 + a^{16} + a^9 + a^{10} + a^{18} + a^{31} + a^{24} + a^{25} + a^6 + a^{19} + a^{12} + a^{13} + a^{15} + a^{28} + a^{21} + a^{22} \end{aligned}$$

$a^{17} = 1$ より

$$\begin{aligned} &= a^3 + a^{16} + a^9 + a^{10} + a + a^{14} + a^7 + a^8 + a^6 + a^2 + a^{12} + a^{13} + a^{15} + a^{11} + a^4 + a^5 \\ &= \sum_{i=1}^{16} a^i = -1 \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (a_3 + a_{14} + a_5 + a_{12}) \cdot (a_6 + a_{11} + a_7 + a_{10}) \\ &= (a^3 + a^{14} + a^5 + a^{12}) \cdot (a^6 + a^{11} + a^7 + a^{10}) \\ &= a^9 + a^{14} + a^{10} + a^{13} + a^{20} + a^{25} + a^{21} + a^{24} + a^{11} + a^{16} + a^{12} + a^{15} + a^{18} + a^{23} + a^{19} + a^{22} \\ &= a^9 + a^{14} + a^{10} + a^{13} + a^3 + a^8 + a^4 + a^7 + a^{11} + a^{16} + a^{12} + a^{15} + a + a^6 + a^2 + a^5 \\ &= \sum_{i=1}^{16} a^i = -1 \end{aligned}$$

2 次方程式の解と係数の関係から

$$y^2 - \alpha_1 y - 1 = 0 \qquad\qquad y^2 - \alpha_2 y - 1 = 0$$

これより

$$y = \frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \qquad y = \frac{\alpha_2 \pm \sqrt{\alpha_2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 + 4}}{2} \qquad = \frac{\alpha_2 \pm \sqrt{\alpha_2^2 + 4}}{2}$$

よって　　よって

$$s = \beta_1 = \frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + 4}}{2} \qquad u = \beta_2 = \frac{\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 + 4}}{2}$$

$$\beta_1 = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} \qquad \beta_2 = \frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}$$

【第 3 段階】

$\gamma_1 = a_1 + a_{16}$

$\gamma_2 = a_4 + a_{13}$ とすると

$$\gamma_1 + \gamma_2 = (a_1 + a_{16}) + (a_4 + a_{13}) = \beta_1$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 \cdot \gamma_2 &= (a_1 + a_{16}) \cdot (a_4 + a_{13}) \\ &= (a + a^{16}) \cdot (a^4 + a^{13}) \\ &= a^5 + a^{14} + a^{20} + a^{29} \\ &= a^5 + a^{14} + a^3 + a^{12} \\ &= \beta_2 \end{aligned}$$

2 次方程式の解と係数の関係から

$$z^2-\beta_1 z+\beta_2=0$$

これより

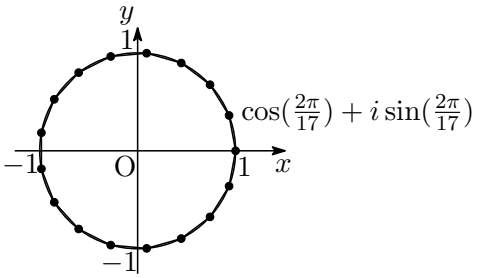
$$z=\frac{-(-\beta_1)\pm\sqrt{(-\beta_1)^2-4\cdot1\cdot\beta_2}}{2\cdot1}$$

$$=\frac{\beta_1\pm\sqrt{\beta_1^2-4\beta_2}}{2}$$

よって

$$\gamma_1=\frac{\beta_1+\sqrt{\beta_1^2-4\beta_2}}{2}\ ,\ \gamma_2=\frac{\beta_1-\sqrt{\beta_1^2-4\beta_2}}{2}$$

【第 4 段階】



$j=a_1+a_{16}=\gamma_1$

$k=a_1\cdot a_{16}=a\cdot a^{16}=a^{17}=1$

より

$\omega^2-\gamma_1\omega+1=0$

$$\omega=\frac{-(-\gamma_1)\pm\sqrt{(-\gamma_1)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$$

$$\omega=\frac{\gamma_1\pm\sqrt{\gamma_1^2-4}}{2}$$

これより

$$a_1=\frac{\dfrac{\beta_1+\sqrt{\beta_1^2-4\beta_2}}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{\beta_1+\sqrt{\beta_1^2-4\beta_2}}{2}\right)^2-4}}{2}$$

$a_1=\cos\Big(\dfrac{2\pi}{17}\Big)+i\sin\Big(\dfrac{2\pi}{17}\Big)$ より

$$\cos\Big(\frac{2\pi}{17}\Big)=\frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{2(17-\sqrt{17})}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}\right)$$

$$\sin\Big(\frac{2\pi}{17}\Big)=\frac{1}{8}\sqrt{2(17-\sqrt{17})+2\sqrt{2(17-\sqrt{17})}-4\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}$$

$\cos\Big(\dfrac{2\pi}{17}\Big)$ の数字列は整数列大辞典 $A210644$ にあります。第 1 段階において a_i のグループの決め方については素数の原始根の知識が必要です。詳しくは参考文献を参照してください。また今回は計算の仕方を重点にまとめました。厳密には 2 次方程式で解を求めて $\pm$ の値を結び付けるとき，大小関係を考慮する必要があります。　　(参考文献 : 数学セミナー 1992 年 9 月号)

【a_i のグループの決め方】

3 が素数 17 の原始根であることより $\rho_k=a_1^{3^k}\,(k=0,1,2,\cdots,15)$ とおき $a_1=a$ とすると

$$\begin{array}{cccc}\rho_0=a, & \rho_1=a^3, & \rho_2=a^9, & \rho_3=a^{10},\\ \rho_4=a^{13}, & \rho_5=a^5, & \rho_6=a^{15}, & \rho_7=a^{11},\\ \rho_8=a^{16}, & \rho_9=a^{14}, & \rho_{10}=a^8, & \rho_{11}=a^7,\\ \rho_{12}=a^4, & \rho_{13}=a^{12}, & \rho_{14}=a^2, & \rho_{15}=a^6,\end{array}$$

これより $\alpha_1=\displaystyle\sum_{k=0}^{7}\rho_{2k}$, $\alpha_2=\displaystyle\sum_{k=0}^{7}\rho_{2k+1}$ として解く (原始根については他の文献参照)