2.1.8　ホテル宿泊問題

問. A 町から F 町まで旅行する計画を立てた。旅行途中の B 町，C 町，D 町，E 町には宿泊施設が 2 か所づつある。この 8 か所の宿泊施設の必ずどこかに 1 回は宿泊して旅行するとき以下の問いに答えなさい。 ただし旅行コースは B 町,C 町,D 町,E 町の順とし逆にさかのぼって宿泊施設に泊まることはないものとし，1 つの町には 1 か所しか泊まれないものとします。

(1) 異なる全ての旅行コースは何通りあるか求めなさい。

(2) E 町の宿泊施設は D 町に泊まった人あるいはどこにも泊まっていないときには泊まれるが，B 町または C 町に泊まって D 町に泊まらない場合は泊まれないとき旅行コースは何通りあるか求めなさい。

(3) (2) の条件のもと B 町の 2 つの宿泊施設は 18 と 20，C 町の 2 つの宿泊施設は 6 と 7，D 町の 2 つの宿泊施設は 3 と 4，E 町の 2 つの宿泊施設は 85 と 101 という数が割り当てられているとき，宿泊するたびに数を加えていくと何通りの数ができるか求めなさい。

【解答】

(1) 泊まらないという選択を加えると
$_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 3^4 = 81$
この 81 通りのうち 1 通りはどこにも泊まらない場合なので
$81 - 1 = 80$(通り)

(2) 泊まらないという選択を加えると D 町までは
$_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 - 1 = 3^3 - 1 = 26$ (通り)
26 通りのうち D 町の宿泊施設に泊まったのは 18 通りで泊まっていない場合は 8 通りなので
$18 \times 3 + 8 = 62$
これに E 町しか泊まらない 2 通りを加えて
$62 + 2 = 64$ (通り)

(3) 1 泊した場合は 18,20,6,7,3,4,85,101 の 8 通り
2 泊した場合は 24,25,21,22,26,27,23,24,9,10,10,11,88,104,89,105 の 16 通り
3 泊した場合は 27,28,28,29,106,122,107,123,29,30,108,124,109,125,94,110,94,110,95,111,95,111,96,112 の 24 通り
4 泊した場合は 112,128,113,129,113,129,114,130,112,128,113,129,115,131,116,132 の 16 通り
並び変えて重複を除外すると
3,4,6,7,9,10,11,18,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,85,
88,89,94,95,96,101,104,105,106,107,108,109,110,111,112,128,113,114,115,116,
122,123,124,125,128,129,130,131,132 の 49 個

問題の趣旨および (3) の 18,20,7,6,3,4,85,101 という数は「聖母の数」からの引用だが数を変えることによって場合の数が変わってくる。例えば 5,7,9,11,13,15,27,27 にすると 28 個になる。