元気が出る数学の授業II

～高校数学教材集～

小澤茂昌（おざわしげまさ）

はじめに

本書は 2023 年 12 月 20 日に発売された「元気が出る数学の授業　～高校数学教材集～」を補追する形でまとめた高校数学に関する教材集である。本を出版するにあたって頁数の関係や校正の段階で削ったために載せられなかった教材や，その後開発した教材をまとめたものである。

書籍を出版する際には帯をどうするかを考えます。私の想いは「元気が出る数学の授業　～高校数学教材集～」の帯の文にした以下の文に集約されます。

【表帯】

「元気が出る授業」とは「わかった」「できた」「楽しかった」という感覚をはっきり感じとることができる授業。わかれば楽しい。できれば楽しい。この生徒の 3 つの感覚を少なくともひとつを刺激する。

【裏帯】

教材が変われば授業が変わる。
授業が変われば生徒が変わる。
本時の目的を考え，各先生方で自分の指導する生徒の実態と照らし合わせて授業を組み立ててほしい。

目次を見るとわかるが，節 (section)，頁 (subsection) の数字が連続していない。これは書籍「元気が出る数学の授業　～高校数学教材集～」を継続しているからです。

目 次

第1章　数学 I

1.1　数と式

1.1.2　開平法

中学校の指導範囲ではあるが，中学ではルートのついた数の指導で手一杯の学校が多く，開平法の指導は手つかずの学校が多い，そんなに複雑な計算ではないのでまとめておく。(どうしてそのような計算をするとできるのかは Wikipedia の「開平法」を参照)

問. $\sqrt{2020}$ を小数第 1 位まで求めなさい。

(1) 小数点を基準として 2 桁ずつ区切り 20 と 20 という数があると感じる。

(2) 平方して 20 になる○の数を考える。この場合にはあてはまる数はないが $4 \times 4 = 16$ が 20 に最も近い数である。

(3) 出てきた結果から $\square$ の数を考える。$8\square\times\square$ が 420 になる数である。この場合 $8\boxed{4}\times\boxed{4}= 336$ が最も近い数である。次の 5 は $8\boxed{5}\times\boxed{5}= 425$ となり420を超えてしまうからである。

(4) 次は小数点以下になるので, 今求めた$\boxed{4}$の右に小数点をつけよう。そして差の計算結果の 84に 2 つ 00 をつけて 88◇ ×◇ が 8400 になる ◇ を考えると，あてはまる数は 9 ということがわかる。

(5) さぁ最後のステップである。△に 5 をあてはめると 8985×5 は 39900 を超えてしまうので，小数第 2 位は切り捨てということがわかる。結果 $\sqrt{2020} \fallingdotseq 44.9$ になる。

	④ $\boxed{4}$. 9 △
④	$\sqrt{20\ 20}$
④	16
8 $\boxed{4}$	4 20
$\boxed{4}$	3 36
8 8 9	84 00
9	80 01
8 9 8 △	3 99 00
△	

1 つの問題だけだと身につきません。引き続き問題演習をやってみましょう。慣れるために最初は近似値を知っている数がいいと思います。

問. $\sqrt{3}, \sqrt{5}$ を小数第 3 位まで開平法で求めなさい。

	① . $\boxed{7}$ 3 2
①	$\sqrt{3}$
①	1
2 $\boxed{7}$	2 00
$\boxed{7}$	1 89
3 4 3	11 00
3	10 29
3 4 6 2	71 00
2	69 24
3 4 6 4	1 76

	② . $\boxed{2}$ 3 6
②	$\sqrt{5}$
②	4
4 $\boxed{2}$	1 00
$\boxed{2}$	84
4 4 3	16 00
3	13 29
4 4 6 6	2 71 00
6	2 67 96
4 4 7 2	3 04

平方根の近似値で思い出すのは大学時代初めて「ニュートン法」に出会ったときでした。適当な値から始めて接線と x 軸との交点を繰り返し求めていくことで近似値を求めていく方法です。少しの計算でかなり正確な近似値を求めることができたのに感動したことを覚えています。自分の大学時代はコンピュータの出始めでした。CPU が 750k Hzのコンピュータやメモリーが 4k byte なんていっても若い人は想像もできないだろうな〜。

1.2　集合と命題

1.2.3　映画の一場面　〜ラビリンス/魔王の迷宮〜

1986 年に制作されたアメリカ映画「ラビリンス/魔王の迷宮」の中に，迷路の中をさまよっている主人公が，赤いドアか青いドアのどちらかを選択しなければならない場面があった。ドアの向こう側は一方が王宮へ，もう一つは魔界の沼に続いている。それぞれのドアには門番がいて片方は正直者で質問に対して必ず正しい答えを，もう片方はウソつきで必ず間違った答えを答える。どちらが正直者かウソつきかはわからない。質問は 1 回限りで，片方の門番にしかできない。質問された門番は Yes か No で答えるという設定である。ここで主人公は赤いドアの門番に向かって

「彼 (青色のドアの門番) はこちらのドアが正しいドアだと言うかしら。」

と尋ねた。尋ねられた門番は

「Yes」

と答えた。そこで主人公は青い門番のドアを開けて進んでいった。この場面を考察してみよう。

[1]

場合	正しいドア	赤いドアの門番	青いドアの門番	赤いドアの門番の返答
①	赤いドア	正直者	ウソつき	No
②	青いドア	正直者	ウソつき	Yes
③	赤いドア	ウソつき	正直者	No
④	青いドア	ウソつき	正直者	Yes

①，②の場合，青いドアの門番はウソつきなので逆のことを答えることから，正直者の赤いドアの門番は，①の場合は No。②は Yes。

③，④の場合，青いドアの門番は正直者なので③の場合は正しい答えは Yes だが，赤いドアの門番はウソつきなので No と答え，④は正しい答え No を Yes と答える。

まとめると，Yes と答えたらドアを変更し，No と答えたらそのまま進めば良いことが分かる。このことから映画の中の主人公は正しい判断をしたことがわかる。挿入した写真は映画公開 30 周年を記念して $\dfrac{1}{6}$ のスケールで発売されていた，別の 2 つのドアを飾っていた耳が遠い豚のノッカーとモゴモゴしゃべる豚のノッカーで，こちらは「ドアのノッカーがドアの向こう側のことを知るわけないだろう。」と冷たい言葉で主人公に話しかけていた。

[1]画像引用先:1/6 ラビリンス 魔王の迷宮/ドアノッカー レプリカ写真

1.5　データの分析

1.5.2　地球温暖化は進んでいるのだろうか？ (資料 P66 参照)

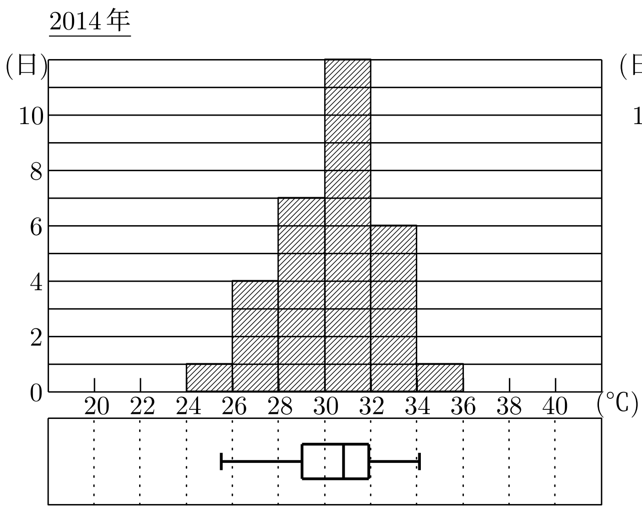
中学校の「資料の整理」で学んだ復習の授業です。教科書に書いてあるデータで復習してもいいのですが，せっかくの機会なので実際の生データで取り組ませます。最初にデータを取得しなければいけませんね。過去の気象のデータは

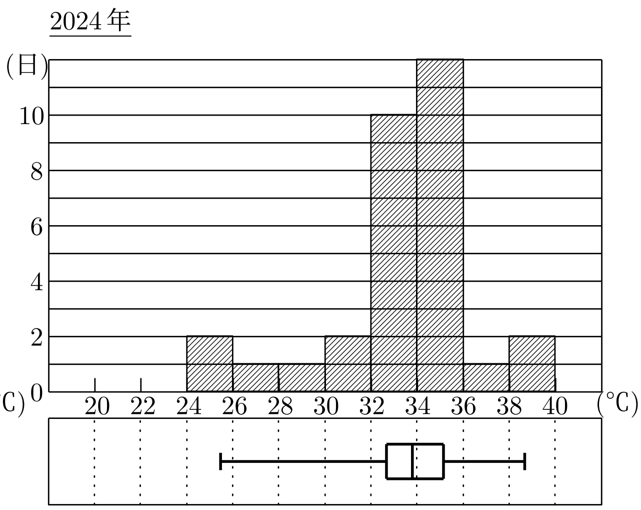
`https://www.data.jma.go.jp/stats/etrn/index.php`

にあります。この気象庁のサイトで地域と年月を選択し，日ごとの値を表示とするとデータが取得できます。このデータで現在に近い年の 8 月の最高気温のデータと過去の，ここでは 10 年前の最高気温とを比較し温暖化が進んでいるかを感じる授業です。10 年前のデータだとやや進んでいる，20 年前のデータだと確実に進んでいることが実感できると思います。

私が授業を行ったデータを紹介します。場所は現在勤めている静岡県浜松市を選択しました。

資料	最大値	最小値	範囲	平均値	最頻値	中央値	第一四分位数	第三四分位数
2014 年	34.1	25.5	8.6	30.2	31.0	30.8	29.0	31.9
2024 年	38.4	25.3	13.1	33.3	35.0	33.9	32.5	35.1





実は昨年と今年，データの分析を指導する機会があったのですが，年によっては夏場の気温がかなりある温度帯に集中している年があります。事前にデータを分析してから授業するといいと思います。異常気象と言われていますが，温暖化が進んでいるのがわかります。最後にもう実践している人もいるのかもしれませんが，データの分析はグーグルのスプレッドシートを使った授業を開発できると思います。実は本時の授業を行った際にスプレッドシートを利用してまとめている生徒がいました。授業後に利用したことのある生徒を調べたところ約 40%位の生徒が利用した経験がありました。使い方を知らない生徒のために，次時にデータを 1, 2, 3, 4, 5 として最大値 (MAX)，最小値 (MIN)，合計 (SUM)，平均 (AVERAGE)，順位 (RANK) やヒストグラムの作り方等の授業を行いました。最初にスプレッドシートの講習，その後データの分析の方が良かったかなと感じました。

1.5.3 電卓の使い方

本来は中学校で指導して欲しいと思っているのだが，電卓に触れたことがない生徒が増えてきたように感じる。「データの分析」のどこかで基本的な電卓の操作の指導が必要なのではと感じてきた。タブレットがあるのでスプレッドシートでもいいのだが，スプレッドシートはいつもあるとは限らないのでその前段階でやはり電卓の指導は必要だろう。今ではタブレットの中に電卓が入っている。しかし生徒はコンピュータと電卓の違いさえ知らない。コンピュータと電卓の違いは次の式を入力して出てきた結果ですぐわかる。

計算：$1 + 2 \times 3$

入力：$\boxed{1}$ $\boxed{+}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$

結果が 7 になればコンピュータで，結果が 9 になれば電卓です。自分が電卓を使っているのか，コンピュータを使っているのかをまず最初に確認させたい。そう電卓は計算順序を知らないのです。(このことは電卓の大事な特徴です。)

(1) $\boxed{\texttt{AC}}$ と $\boxed{\texttt{C}}$ の違い (訂正の仕方)

最初に $\boxed{\texttt{AC}}$ (All Clear) と $\boxed{\texttt{C}}$ (Clear) の違いを教えるといい。次の計算問題をわざと間違えながら計算するのです。

計算：$2 \times 3 + 4$

入力：$\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{3}$ $\boxed{+}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\texttt{C}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$

$\boxed{\texttt{C}}$ は"表示を消す"，$\boxed{\texttt{AC}}$ は"すべて消す"と説明すればいいでしょう。

(2) メモリー (Memory) の使い方

次はメモリーです。まず電卓に $\boxed{\texttt{M+}}\boxed{\texttt{M-}}\boxed{\texttt{MR}}\boxed{\texttt{MC}}$ の表示がある電卓かどうか確認させて下さい。機種によっては $\boxed{\texttt{MR}}$ と $\boxed{\texttt{MC}}$ が一緒になった $\boxed{\texttt{MRC}}$ なんていうのもあります。

計算：$2 \times 3 + 4 \times 5$

入力：$\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\texttt{M+}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\texttt{M+}}$ $\boxed{\texttt{MR}}$

電卓の表示に M があるとメモリーに数が記憶されている状態ということも伝えておいた方がいいでしょう。

(3) 累乗の計算の仕方

同じ数を掛け合わせるのにいちいち数を入力していたのでは面倒ということで，これも教えましょう。

計算：2.34^2

入力：$\boxed{2}$ $\boxed{.}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$

計算：2.34^3

入力：$\boxed{2}$ $\boxed{.}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$

これで基本は終わりです。さぁ実際の問題演習に入りましょう。

問. 次の計算を電卓だけを用いて計算しなさい。

(1) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

(2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2$

(3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3$

出題する問題は各先生方に工夫してもらうとして，こんな感じで 1 時間指導すると電卓アレルギーみたいな症状はなくなります。今の子は電卓の取扱説明書なんて読まないでしょうから，しっかりと教えてあげなければなりません。おまけで $\boxed{\div}\boxed{=}$ とすると逆数が表示されます。

第2章　数学 A

2.1　場合の数と確率

2.1.6　反復試行の確率

高等学校において数学 A で学ぶ「確率」の中に反復試行の確率があります。

1 個のさいころを何回か繰り返し投げる場合のように，同じ条件のもとでの試行の繰り返しを反復試行という。

反復試行の確率

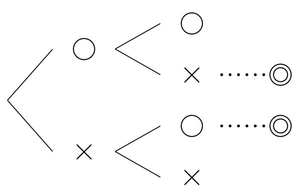
1 回の試行で事象 A の起こる確率を p とする。この試行を n 回行う反復試行で，A がちょうど r 回起こる確率は ${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}$

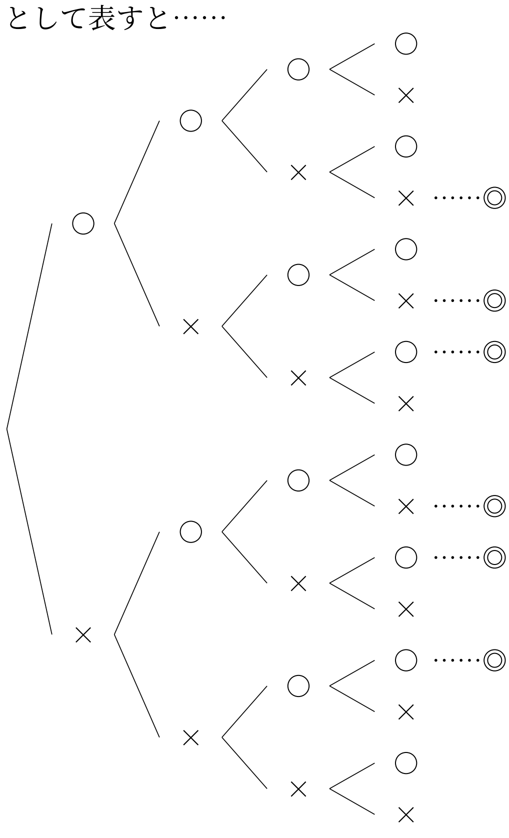
この問題を導入段階で取り組めるように問題を作りました。

反復試行

問. 硬貨を 2 回投げて 1 回だけ表が出る確率を $P(A)$，硬貨を 4 回投げて 2 回だけ表が出る確率を $P(B)$ とするとき，以下の式から正しい式を選びなさい。
(1) $P(A) > P(B)$　(2) $P(A) = P(B)$　(3) $P(A) < P(B)$

場合の数は樹形図が基本です。表を○，裏を×として表すと……





これより 2 回投げて 1 回表がでる確率は

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

4 回投げて 2 回表がでる確率は

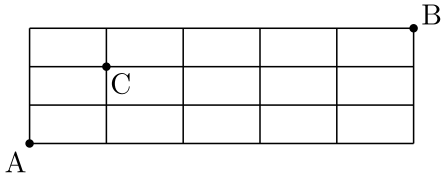
$$P(B) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

このことより正解は (1) でした。どうでしょう生徒たちは正解できましたか？ 夏休みの進学補習で担当していた高校 2 年生の生徒たちに手を挙げさせました。(2) にほとんどの生徒が手を挙げました。まだまだ鍛え方がたりないと実感しました。

2.1.7　最短経路の道順の数と確率

場合の数と確率を学習した後，生徒が間違えやすい問題を取り上げてみました。

問．右の図のような道のある地域について，次の問いに答えなさい。
(1) A から B まで行く最短の道順は何通りありますか。
(2) A から C を通って B まで行く最短の道順は何通りありますか。
(3) A から B まで最短の道を通って行くとき，C を通る確率を求めなさい。ただし各地点でどちらに行くかは等確率とし，一方しか行けないときは確率 1 でその方向に行くものとします。

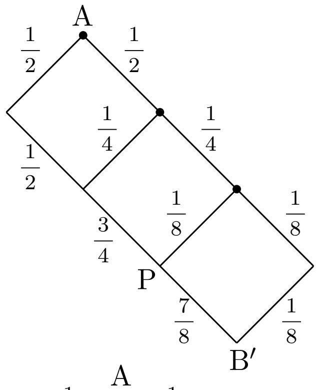


問題を解きながら生徒の間違いに触れていきましょう。

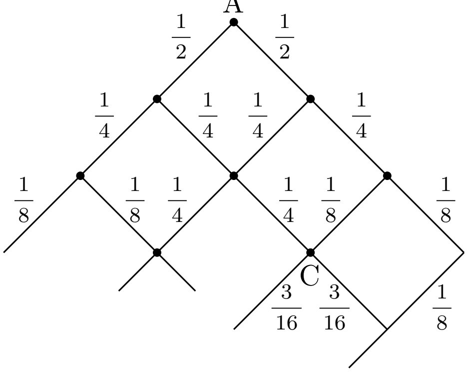
(1) の道順の総数は，横方向の移動 (→) が 5 回，縦方向の移動 (↑) が 3 回より $\dfrac{8!}{5!\cdot 3!}=56$ (通り)

(2) は $\dfrac{3!}{1!\cdot 2!}\times\dfrac{5!}{4!\cdot 1!}=15$ (通り)

(3) は当然 $p=\dfrac{15}{56}$，これが今回の間違いです。どうして $p=\dfrac{(\text{通る道数})}{(\text{道の総数})}$ としてはダメなんでしょう？



まずは簡略化した左図で，A から B′ まで行くとき P を通る確率を考えていきます。A から B′ までの最短の道の総数は 4 通り，P を通って B′ まで行くときは 3 通りです。じゃ P を通る確率は $\dfrac{3}{4}$ でしょうか。図において• が道を選択する場所です。最初に A でどちらかの道を選択するのでそれぞれの道を通る確率は $\dfrac{1}{2}$ になります。P における確率は左側の道が $\dfrac{3}{4}$，右側の道が $\dfrac{1}{8}$ なのでその和 $\dfrac{7}{8}$ が求める確率になります。



問題に戻りましょう。今求めているのは C を通る確率です。 C における確率は左側の道が $\dfrac{1}{4}$，右側の道が $\dfrac{1}{8}$ なのでその和 $\dfrac{3}{8}$ が C を通る確率になります。

確率は同様に確からしい有限の n 個の事象を元に考えています。それぞれの道においては同様に確からしくても，その道が交わり分岐すると，この同様に確からしいの前提が崩れてしまうために，道の数とは全く無関係な数の確率になってしまうのです。

書いていて思ったのですが演習問題として出題するにはもったいないと思いました。(1) を全体の復習課題とし (2) と (3) を同時に出題すれば確率に関する理解が深まる授業が構築できそうです。どんな意見が飛び出るのでしょう。正しい答えを導いた生徒でも間違いの考え方を主張する生徒の考えを打ち負かすことができるかは別問題です。

2.2　図形の性質

2.2.7　9 点円　(資料 P67 参照)

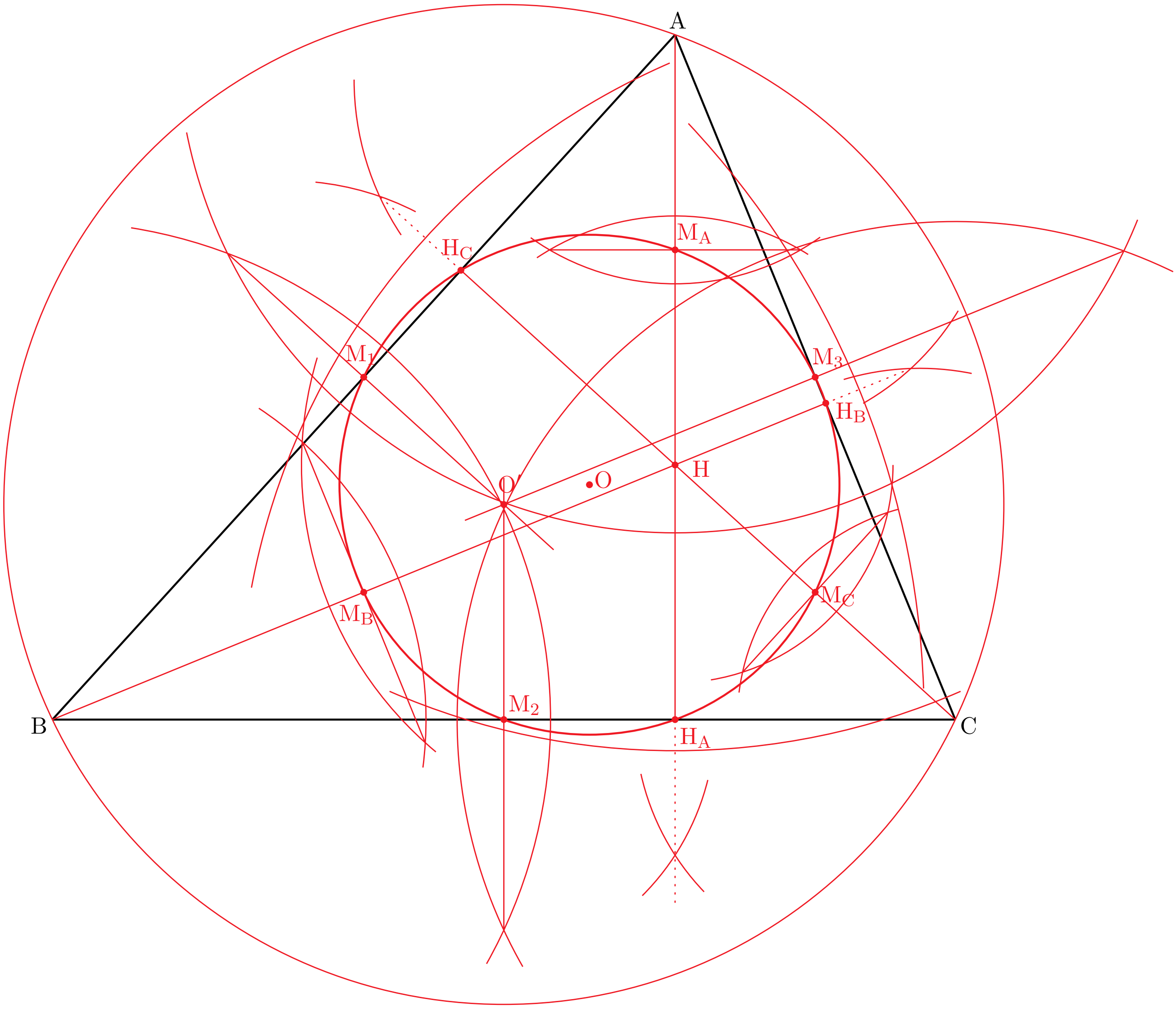
9 点円は知っていますか？ 三角形において

①　各頂点から降ろす垂線と対辺との交点 (垂線の足)

②　頂点から垂心までの中点

③　各辺の中点

これら 9 つの点は同一円周上にあります。証明はしません。作図のまとめの問題としていかがですか？ 正確に書かないと同一円周上にはなりません。垂心 H は説明してあげてください。



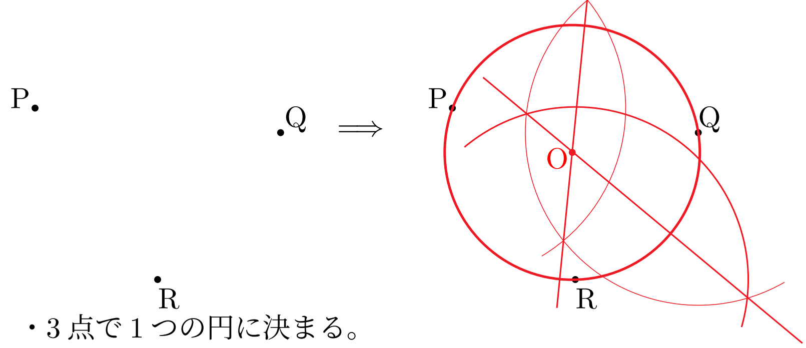
上の作図は点を求めるためだけの作図である。実際にはこれに 9 点円の中心を求めるための作図が加わる。最後の 9 点円の作図は 9 点円の性質を利用した方がいいだろう。9 点円の中心 O は外心 O′ と垂心 H を結ぶ線分の中点で，9 点円の半径は外接円の半径の半分という性質があることから，9 個の点をとった後にその点を通る外接円にあたる 9 点円を書くのではなくて，「垂心と外心の中点から今取った点にあわせて円を書いてみましょう。」ということで 9 点円が書けます。しかし大半の生徒は不正確さが顕著に表れた円になると思います。

2.2.8　4点が同一円周上にある条件

(資料 P68 参照)

指導内容	学習活動	備考
3点を通る円	・同一直線上にない3点P，Q，Rを書いてください。 ・書けましたか？ ・3点P，Q，Rを通る円を作図しなさい。	

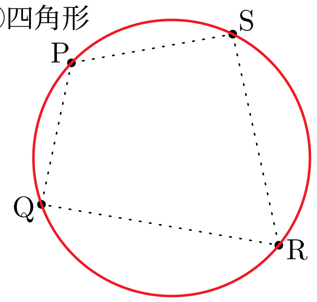
問題図　　解答図



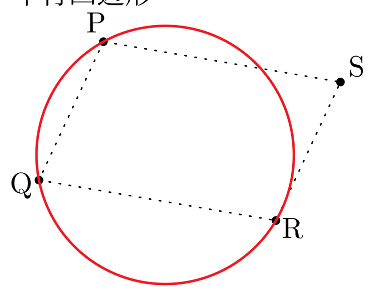
・3点で1つの円に決まる。

指導内容	学習活動	備考
4点が同一円周上にある条件	・4つの頂点が円周上にある四角形はどんな四角形なのかを考えます。プリントにある6つの図形のうち，どの図形が同一円周上にあるのかを探っていきましょう。	・プリント配布

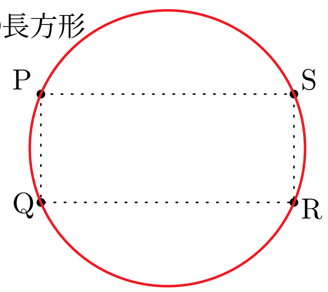
①四角形



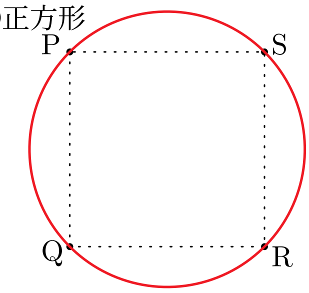
② 平行四辺形



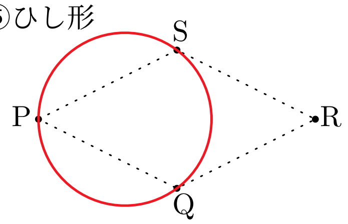
③長方形



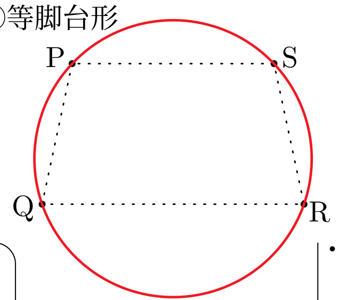
④正方形



⑤ひし形



⑥等脚台形



・同一円周上に頂点がある四角形の共通した特徴は何だろう？

・∠QPR，∠QSR を実測。
・$\angle P + \angle R = 180^\circ$

2.2.8.1 4 点が同一円周上にある条件の雑感

円に関する教材は「接弦定理」を含め昔は中学校で学習していた。以下の「4 点が同一円周上にある条件」において，現在は「円周角の定理の逆」は中学校で，「四角形が円に内接する条件」は高校の数学 A に移行している。

円周角の定理の逆

4 点 A, B, P, Q について，点 P, Q が直線 AB に関して同じ側にあって

$$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB}$$

ならば，4 点 A, B, P, Q は 1 つの円周上にある。

四角形が円に内接する条件

次の (1) または (2) が成り立つ四角形は円に内接する。
(1) 1 組の対角の和が 180° である。
(2) 内角が，その対角の外角に等しい。

数研出版の教授資料の中で四角形 ABCD が円に内接する条件は以下のように記述されている。

[1] 1 組の対角の和が 180° である。

[2] 1 つの内角が，その対角の外角に等しい。

[3] $\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB}$ (円周角の定理の逆)

「[1] の証明は，簡単にできそうで，論理的には意外と難しい。」と記述されている。そうだろうか？ 中学校で学ぶ [3] から [1] を証明してみよう。

仮定) $\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB}$

結論) $\angle \mathrm{APQ} + \angle \mathrm{ABQ} = 180^\circ$

証明) △PAR と △QBR において

$\angle \mathrm{APR} = \angle \mathrm{BQR}$ (仮定) …①

$\angle \mathrm{PRA} = \angle \mathrm{QRB}$ (対頂角) …②

①②より △PAR∽△QBR (2 角) …③

よって $\mathrm{PR} : \mathrm{QR} = \mathrm{AR} : \mathrm{BR}$ …④

△PRQ と △ARB において

④より $\mathrm{PR} : \mathrm{AR} = \mathrm{QR} : \mathrm{BR}$ …⑤

$\angle \mathrm{PRQ} = \angle \mathrm{ARB}$ (対頂角) …⑥

⑤⑥より △PRQ∽△ARB (2 辺の比とその間の角) …⑦

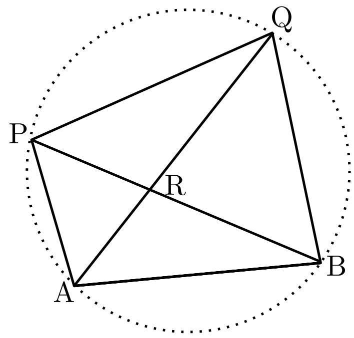
③⑦より $\angle \mathrm{QPR} = \angle \mathrm{BAR}$ …⑧

$\angle \mathrm{PQR} = \angle \mathrm{ABR}$ …⑨

$\angle \mathrm{PAR} = \angle \mathrm{QBR}$ …⑩

仮定および⑧⑨⑩と四角形の内角の性質より

$$\angle \mathrm{APQ} + \angle \mathrm{ABQ} = 180^\circ$$



多少長いが，難しいというレベルの証明ではない。しかしやってみてわかったのだが，同値であることをいうためには，逆にあたる [1] から [3] を証明しなければいけない。円に内接する条件を使わずに [1] から [3] を証明しようとすると，教科書にあるような同一法の証明になってしまう。したがって同じような [1] と [3] ではあるが，これは併記しなければならない事柄であることがわかった。

2.2.9　定幅(ていふく)図形

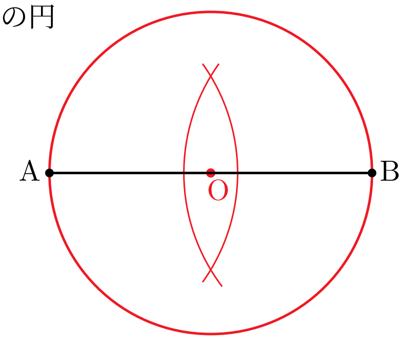
(資料 P69 参照)

定幅図形を知っていますか。どこで測っても幅がいつでも等しい図形のことをいいます。円は代表的な定幅図形ですね。日本のコインは円形のものしかありませんが，右図[1]のイギリスで使われている 20 ペンス (右上) と 50 ペンス (右下) コインはルーローの七角形の形をしています。

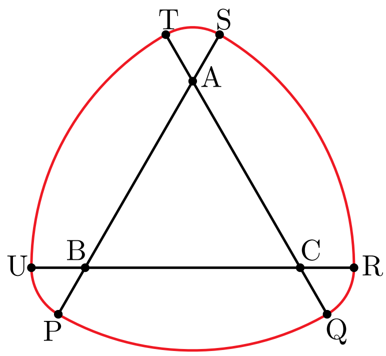
「マンホールのふたはなぜ丸い？」の問題も定幅図形の問題として代表的です。ここでは生徒に定幅図形の作図に挑戦させます。とはいっても，円以外の図形においてはなかなかみつけ出すことも難しいでしょうから，手順に従って作図できるかをどうかを考えます。まぁ設計図通りにプラモデルを組み立てることができるかという授業です。指導要領にはない課題だが，私たちは数学を教えているのです。円以外の定副図形を知らせたいと感じたらそれは課題と成立するのです。

2.2.9.1　定幅図形の作図に挑戦！　解答

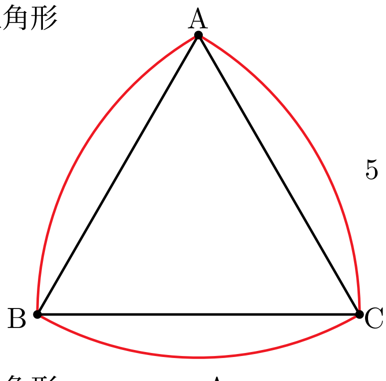
1　直径 AB の円



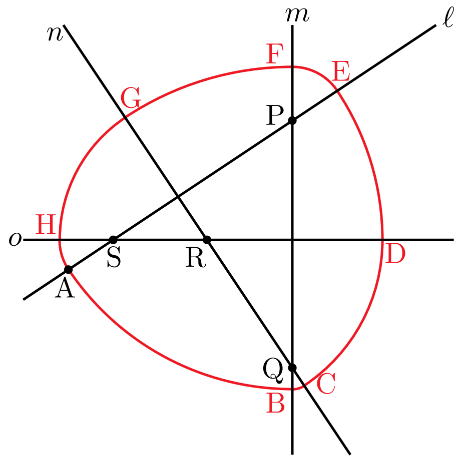
4 ルーローの三角形の発展形



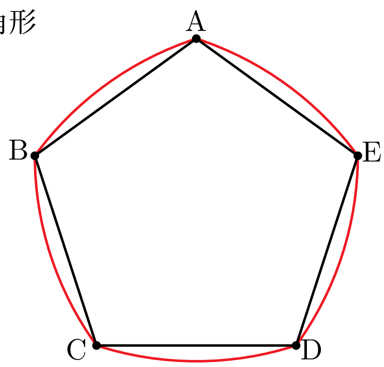
2 ルーローの三角形



5 交差線法



3 ルーローの五角形



(参考文献：「NHK ワンダー数学ランド」講師 秋山 仁 日本放送出版協会 1998 年 8 月)

[1]画像は Wikipedia(英語)「Twenty pence」,「Fifty pence」から引用

2.2.10　三角形の 3 心と垂心・傍心

外心・内心・重心を決定する 3 本の直線が 1 点で交わるという性質は，作図で求めたときかなり気持ちがいいものである。外心はその後三角形の頂点を通る外接円の作図がまた気持ちいい。内接円も三角形の辺がしっかり接線になっているとすっきりする。それと比較して垂心はあっちの方に放り投げられている現状である。三角形は異なるが垂心と三角形の外心が一致する性質を組み合わせれば，外心だけで十分に 1 時間の教材として成立するはずである。中学校で既習でもほとんどの生徒が感覚的に覚えているので，しっかりと復習しながらその意味を再確認することは大切なことである。例えば「直線と線分の違いはなんだろう？」という問いに簡潔に答えられる生徒も少ない。直線は両端に伸びていて，線分は両端が点という決まり切った定義を答える生徒が大半である。大切なことは決定的な違いを感じているかである。

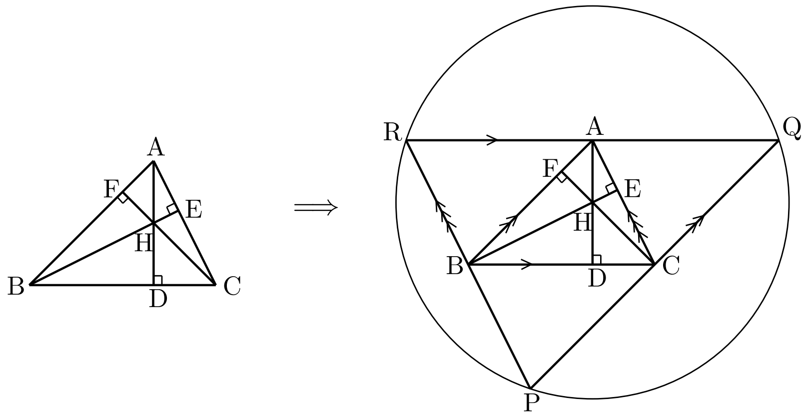
「直線にはなくて線分にはあるものはなんだろう？ 3 文字で答えなさい。」

答えは"長さ"である。

2.2.10.1　垂心

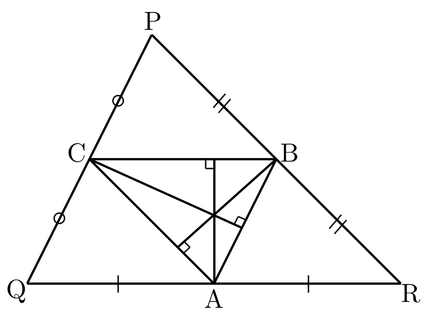
さて本題に戻ろう。外接円を学んだ後に垂心を学習させる。最初は作図から入り 1 点で交わることを実感させたい。次に「この垂心もなぜ 1 点で交わるのだろうか？」と問うのである。

作図した垂線を垂直二等分線とする三角形が作れれば，外心が 1 点で交わることから説明できることを理解させて，この 3 本の垂線を垂直二等分線とする三角形の存在を考えさせるのである。図の中の 3 つの平行四辺形に気がつけば中点連結定理にふれなくても小学生でも理解できる。



教科書改訂前の数研出版の数学 A 教科書の章末の練習問題に以下のような問題があった。

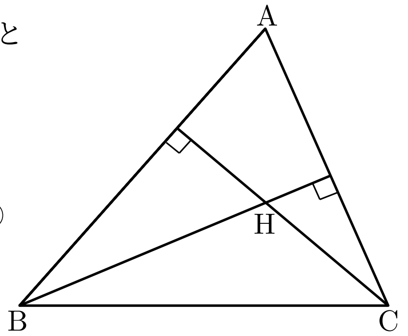
> 問.　△PQR の辺 QR, RP, PQ の中点を，それぞれ A, B, C とする。△ABC において，各頂点から向かい合う辺に下ろした 3 本の垂線は，△PQR の外心で交わることを証明せよ。



証明は中点連結定理を用いた基本的な証明である。ここでは省略するが，教科書を回して見ると上記と同じ △ABC を見ることができる。この垂心の証明を意識していると感じた。

垂心の最後に数学 C のベクトルを用いての証明を載せておく。ベクトルの指導の後，たぶん忘れているであろう生徒に数学 A ではどうやって証明したのか尋ねるのもいいと思う。

> 問．△ABC において頂点 B, C から向かいあう辺またはその延長線上に垂線を下ろし，その 2 直線の交点を H とするとき，AH ⊥ BC を証明しなさい。



A, B, C, H の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{h}$ とすると

仮定 BH ⊥ AC より

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$
$$(\vec{h}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$$
$$\vec{h}\cdot\vec{c}-\vec{h}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$
$$\vec{h}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{h}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}\ \cdots\cdots①$$

仮定 CH ⊥ AB より

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$
$$(\vec{h}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$
$$\vec{h}\cdot\vec{b}-\vec{h}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$
$$\vec{h}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{h}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}\ \cdots\cdots②$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=(\vec{h}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})\\&=\vec{h}\cdot\vec{c}-\vec{h}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=(\vec{h}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b})-(\vec{h}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c})\end{aligned}$$

①, ②より

$$\begin{aligned}&=(\vec{h}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c})-(\vec{h}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c})\\&=0\end{aligned}$$

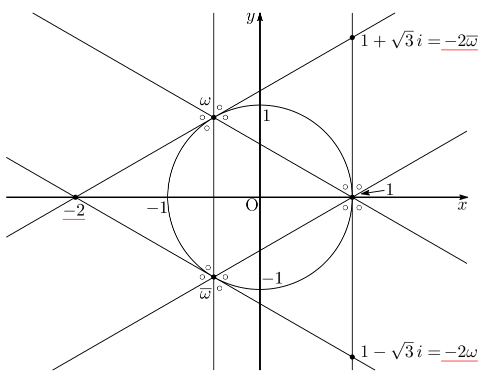
よって $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，これより AH ⊥ BC

図を見て感じたのだが，同じ意味の問題なのに点を表す記号が 4 つしかない。向きだけを考えることができるベクトルの性質を用いての証明は，これはこれで美しいと感じました。

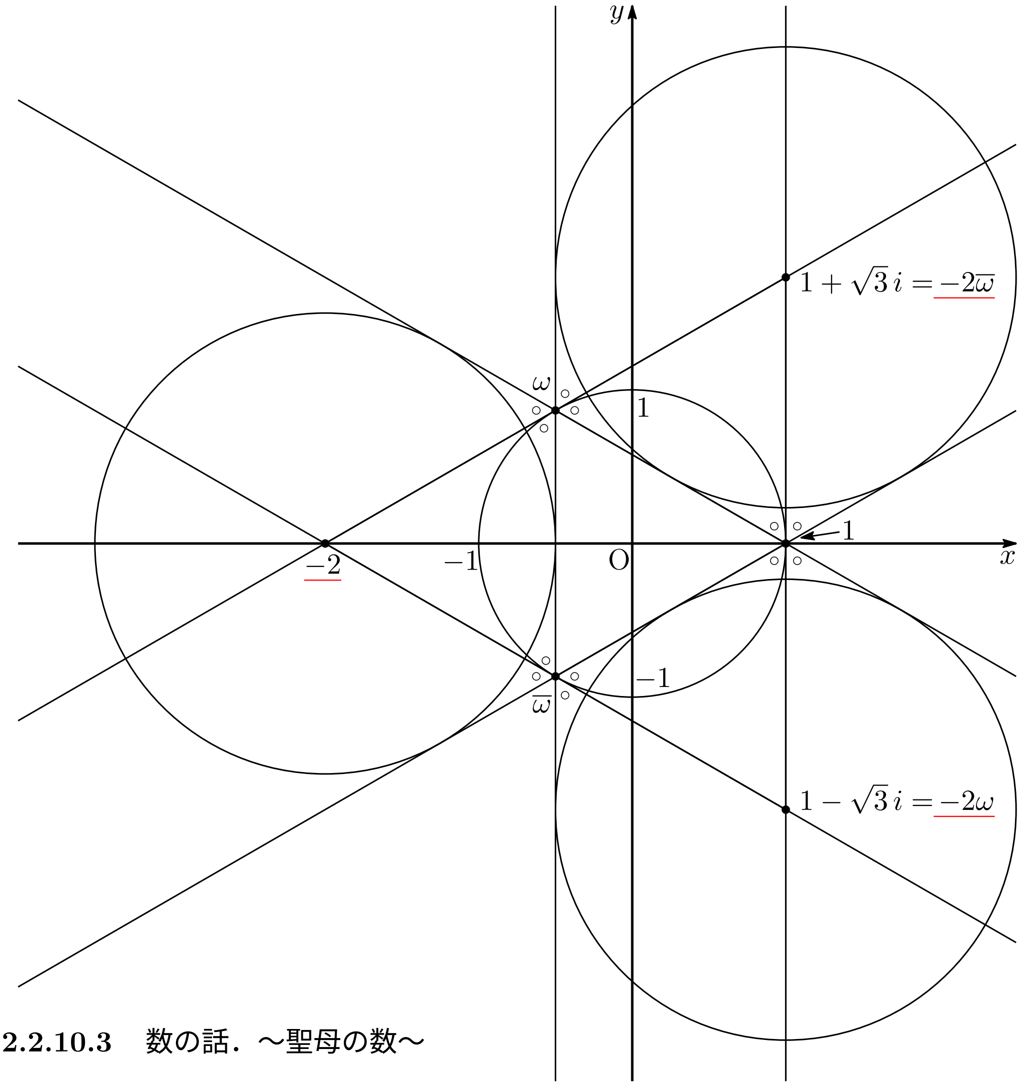
2.2.10.2　傍心

3 直線が 1 点で交わらないので，忘れられている外角の二等分線からできる傍心だが，複素数平面を組み合わせると面白い問題ができることに気がつきました。

> 問．方程式 $z^3-1=0$ の解を複素数平面にとり，それぞれの解を頂点とする三角形は正三角形である。この正三角形の傍心を表す複素数をすべて求めなさい。ただし傍心とは外角の二等分線が交わる交点である。



せっかくここまで作ったので傍接円を描いた図を載せておきます。目的の複素数の求め方はいろいろな解き方があるので省略しました。



2.2.10.3　数の話．～聖母の数～

$\boxed{3}$

聖母の奇跡と呼ばれるものはたくさんありますが,本書で考える聖母の奇跡はフランスのルルドとポルトガルのファティマ,日本の秋田の3か所,合計28回の出現を考えます。($122'11''$参照)

	場所	西暦年	回数
1	ルルド	1858年	18回
2	ファティマ	1917年	7回
3	秋田	1973年	3回

$\boxed{122'11''}$

聖母の奇跡があった3か所の北緯の合計は$122'11''$でした。(186参照)

	場所	北緯	東経・西経
1	ルルド	$43'\,06''$	西経 $0'\,03''$
2	ファティマ	$39'\,62''$	西経 $8'\,66''$
3	秋田	$39'\,43''$	東経 $140'\,06''$

$$12211=110^0+110^1+110^2$$

「東経・西経は子午線を原点とし,日本の方向を正の数として計算すると 31.25 でした。」(Oz)

$$(180-140.06)-0.03-8.66$$
$$=31.25=5^5\times10^{-2}$$

「聖母様"Perfect !"」(Oz)

$\boxed{1917}$その 2

ファティマの聖母が出現した西暦年は日本で起きた第2次世界大戦末期の悲しい出来事である2つの原子爆弾の爆発時刻の和でした。

回	年月日	時刻
ヒロシマ	1945年8月6日	8:15
ナガサキ	1945年8月9日	11:02

$$815+1102=1917$$

「神さまは一生懸命仕事しているのに,人は"偶然"という言葉を使うのでしょうね。」(Oz)

2.2.11　デルタ多面体

デルタ多面体を知っていますか？

デルタ多面体とは面の形がすべて正三角形の多面体です。正多面体の中のデルタ多面体は正四面体，正八面体，正二十面体です。ここで紹介するデルタ多面体は 3 種類あり，正四面体を 2 つ貼り合わせたデルタ六面体，正八面体のデルタ八面体，側面が正三角形 5 個からなる五角錐を 2 つ貼り合わせたデルタ十面体です。この 3 種類の多面体が折り紙で表現できるのです。

設計図は一人一枚分けてもいいが，4 人で 1 枚くらいの方が不自由ながらも活動は活発になると思います。

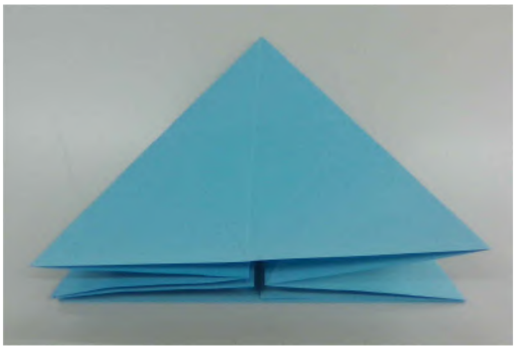
この折り紙を使った授業のポイントは 3 つあります。

(1) デルタ六面体はなぜ正多面体の仲間ではないのだろうか。

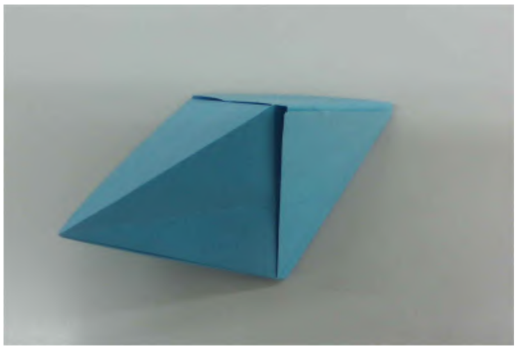
(2) デルタ八面体から正八面体を体感させる。

(3) デルタ十面体から変形できるデルタ十二面体が立体図形にならずに平面図形になる理由をつかませる。

作成途中 (設計図 13)

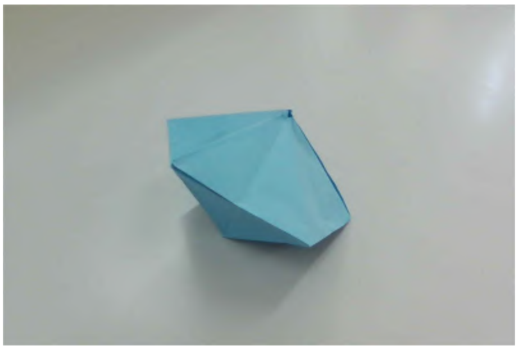


デルタ六面体 (設計図 18)



デルタ八面体 (正八面体) (設計図 19)

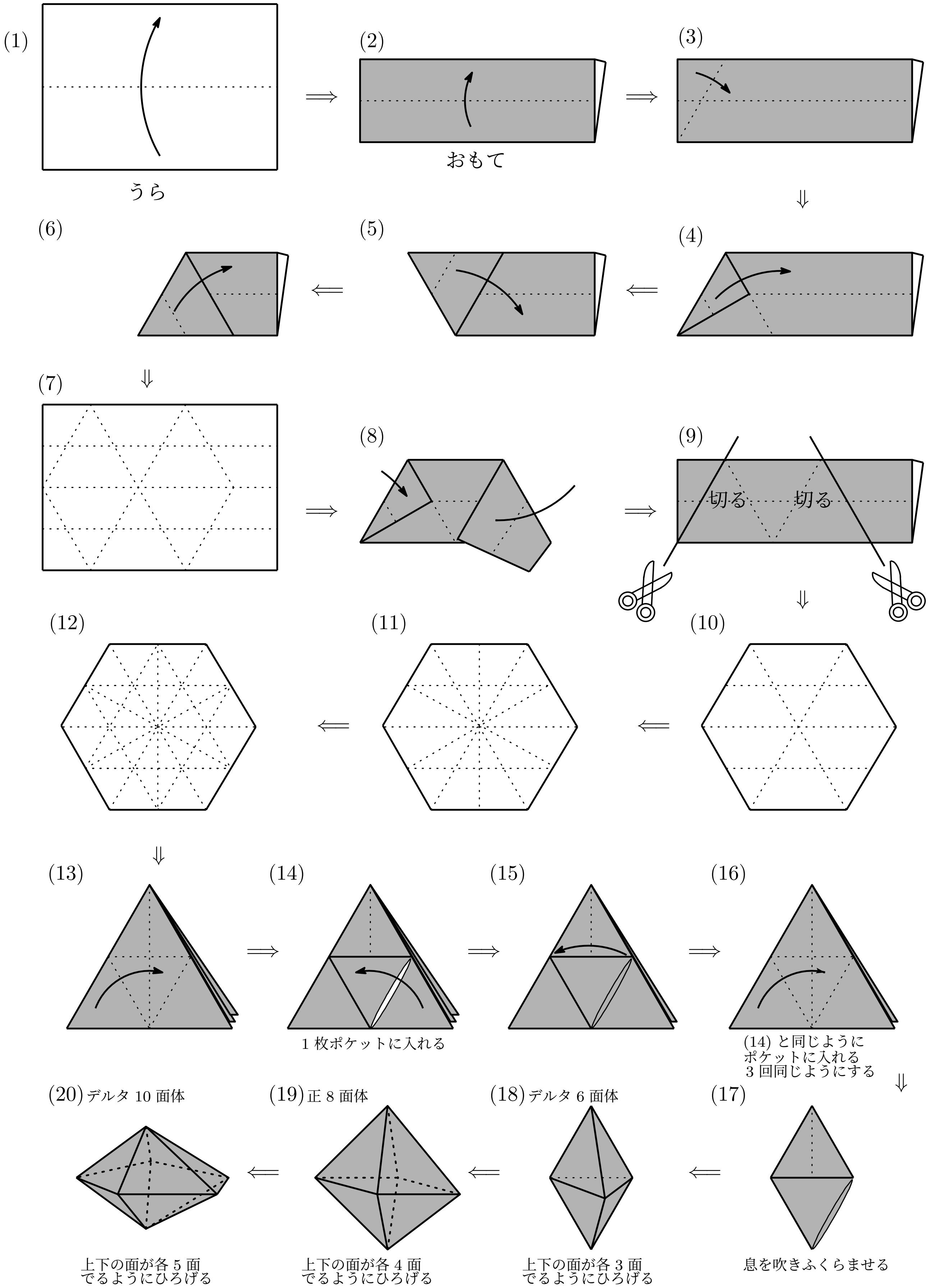
デルタ十面体 (設計図 20)



つぶれたデルタ十二面体

中学校のとき立体模型を触ったことのある生徒を調べたら約 40%でした。立体の感覚はなかなかすぐには身につきません。湯豆腐を食べるときには角を切ってどんな立体になるかを想像しながら食べるといいでしょう。食べたときの味までは保証できませんが……。

2.2.11.1　デルタ多面体設計図



2.3　数学と人間の活動

2.3.3　ペーター・プリヒタの素数円

2.3.3.3　驚きの素数

素数を研究していくとビックリする素数と出会います。例えば 1117 は素数ですが, この素数の数字列を 2 行 2 列にしたとき縦でも横でも対角線でも, その数字列が素数に成り, また逆順の縦でも横でも対角線でもその数字列は素数[2]になります。3 行 3 列で最小の数は 179991179 です。

$$\begin{array}{ccccc}
71 & 11 & & 71 & 11 \\
\nwarrow & \uparrow & & \uparrow & \nearrow \\
11 \leftarrow & \multicolumn{3}{c}{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 7 \\ \hline\end{array}} & \rightarrow 11 \\
71 \leftarrow & & & & \rightarrow 17 \\
\swarrow & \downarrow & & \downarrow & \searrow \\
11 & 11 & & 17 & 17
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
991 & 191 & 797 & 919 & 199 \\
\nwarrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \nearrow \\
971 \leftarrow & \multicolumn{3}{c}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 7 & 9 \\ \hline 9 & 9 & 1 \\ \hline 1 & 7 & 9 \\ \hline\end{array}} & \rightarrow 179 \\
199 \leftarrow & & & & \rightarrow 991 \\
971 \leftarrow & & & & \rightarrow 179 \\
\swarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \searrow \\
991 & 191 & 797 & 919 & 199
\end{array}$$

これで驚いては初心者です。驚きは次の 1089 桁の素数です。逆順含めて横 $33 \times 2 = 66$ 個, 縦 $33 \times 2 = 66$ 個, 対角線 $2 \times 2 = 4$ 個, 元の素数を含めて合計 137 個の数すべて異なる素数[3]です。

147529895941991587879456361416793
343797754289852575517133312684269
943695978946644516863648961536981
354977375935673418795287369494189
373478623641239162919379269294319
941871985794933399739235523691657
154837889117834232678974449658279
117129522895488222612449716435651
112797868118722475112367318718359
954332756851152845673554343833423
958324129279242571543956244312159
149656971499164148747227159798119
915531789396889314926554998567389
189177184378411356887579966732519
395769634484946484155736859195773
976485587598811713196922772648319
742413259665798111566314845954551
344321292792178583218155711143611
735499324729469232679643212644511
755544726594454683193623626957711
324895114496128478896375157597659
974246467315936911531792288239249
136494329788845728831611728857639
343337449493221561738959339141347
119138332653219119612984163669317
356624631952956188127648784846583
361813646131913157456632928169513
747231224138425962243343371145487
745954412587484837933238642278851
955148574512595199969685612245439
118737626399742196143742577819117
917319979999777371311371999793393

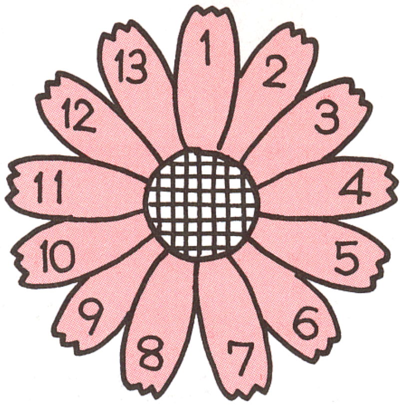
[2]整数列大辞典：A224398
[3]参考文献：Newton 別冊 数学の世界 数の神秘編 2018 年 11 月 ニュートンプレス

2.3.5　数学ゲーム

2.3.5.2　花びら取りゲーム

(資料 P67, P70 参照)

問. 2 人で 13 枚の花びらがついた花から先手，後手を決めて，1 回に 1 枚または隣り合った 2 枚の花びらを順に取っていきます。最後に残った花びらを取った方が勝ちです。



という問題です。ようするに花びらを取れなくなったら負けです。これも何枚か印刷した用紙を用意するといいでしょう。やり方は激カラサンドイッチと同じです。このゲームは後手必勝です。

まだまだたくさんありますが，後は各自で調べてみてください。先手必勝とか後手必勝とか書きましたが，やっている生徒はそんなことはわからずに一生懸命取り組むと思います。短時間でこのゲームは先手が絶対勝つ！ なんてことを発見できればそれはベタほめしてあげてください。教科書にはない教材ですが数学的な考え方を身につけるのにはうってつけの教材です。

(参考文献：「秋山 仁の算数ぎらい大集合」1994 年 7 月 日本放送出版協会，画像はここから引用しました。)

2.3.5.3　元気話．丁半の話

確率の考え方が根付くまでは出方だけで事象を考察していました。といったことから以下の話を考えてみました。昔々の助さん，格さんの会話です。

助さん「おい，格さんご隠居に黙ってこんな所に来ていいのかよ？」
格さん「たまにはいいじゃないか。ところで助さん半，丁どっちに賭ける？」
助さん「俺は絶対丁中心だな。」
格さん「どうして？」
助さん「だってよ，格さん。調べたんだ，丁の方が出方がたくさんあるんだ。」

助さんメモ

丁 (12 通り)：	$1-1, 1-3, 1-5, 2-2, 2-4, 2-6$ $3-3, 3-5, 4-4, 4-6, 5-5, 6-6$
半 (9 通り)：	$1-2, 1-4, 1-6, 2-3, 2-5, 3-4$ $3-6, 4-5, 5-6$

格さん「なるほど…。それは知らなかったな。助さん頭いいじゃないか，じゃ俺も今日は丁を主体に狙っていこうかな。」
助さん「ご隠居もいないことだし，小遣い稼いで帰ろうぜ。」

数時間後，2 人の財布の中は空っぽになってしまいました，とさ。
今の生徒は丁半の意味を知りません。丁は丁度いいから偶数，半は半端から奇数を表すことも伝えてください。

2.3.6　$(m,\,k)$-完全数

2.3.6.4　(完全数) = (超完全数)×(メルセンヌ素数)

2024 年 10 月 21 日素数探索プロジェクト「GIMPS」は新たな最大素数が発見されたと発表しました。その数は 41024320 桁の数でした。

$$2^{136279841}-1$$

今回みつかったメルセンヌ素数から求めることができる完全数は

$$2^{136279840}\cdot(2^{136279841}-1)$$

です。桁数は 82048640 桁です。現代では完全数になるときの 2^{n-1} の数を超完全数，2^n-1 の数をメルセンヌ素数といいます。超完全数は約数の和を求めるとメルセンヌ素数になり，続けて 2 回目の約数の和を求めると自身の 2 倍になる数です。約数関数 σ を用いてこの数を表すと $\sigma^2(n)=2n$ を満たす数を超完全数と定義できます。

数学教師として知っていてほしい完全数にまつわる性質を考えてみます。

2.3.6.5　どうしてメルセンヌ数 2^n-1 が素数になると完全数がみつかるの？

「ユークリッド原論」第 9 巻 命題 36 からの言葉を引用しましょう。当時は無限和 ($\cdots$ を用いた式) なんて存在しない時代です。

「もし単位から始まり順次に 1 ： 2 の比をなす任意個の数が定められ，それらの総和が素数になるようにされ，そして全体が最後の数にかけられてある数をつくるならば，その数は完全数であろう。」

上の文は現代では次のように置き換えられます。

$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=M_n$ が素数ならば $M_n\times 2^{n-1}$ は完全数になる。

証明してみましょう。

M_n は初項 1，公比 2 の等比数列の和なので

$$M_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$$

ここで $N=2^{n-1}(2^n-1)$ とする。$(n\geqq 2)$

素数 P の約数の和は $P+1$ になるので

2^n-1 が素数ならば σ を約数関数として $\sigma(2^n-1)=2^n$ になる。

2^{n-1} の約数の和は初項 1，公比 2 の等比数列の和 (M_n) なので

$$\sigma(2^{n-1})=\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$$

よって N の約数の和 $\sigma(N)$ は

$$\begin{aligned}\sigma(N)&=\sigma(2^{n-1}\cdot(2^n-1))\\&=\sigma(2^{n-1})\cdot\sigma(2^n-1)\\&=(2^n-1)\cdot 2^n\\&=2\cdot 2^{n-1}\cdot(2^n-1)\\&=2N\end{aligned}$$

メルセンヌ素数は整数列大辞典 $A000668$ にあります。

$$3,\ 7,\ 31,\ 127,\ 8191,\ 131071,\ 524287,\ 2147483647,\cdots$$

2.3.6.6　メルセンヌ素数をつくる指数の数はどうして素数なの？

メルセンヌ素数をつくる指数の数は素数でなければならない証明です。証明というほどたいそうなものではありませんが指数が合成数になった場合は因数分解できることは数学 II のレベルでわかるようになります。

$$\begin{aligned}&2^{ab}-1\\&=(2^a-1)(1+2^a+2^{2a}+\cdots+2^{(b-1)a})\end{aligned}$$

分配法則を用いてかっこをはずすと

$$\begin{array}{rl} & 2^a+2^{2a}+2^{3a}+\cdots+2^{(b-1)a}+2^{ba}\\ +) & -1-2^a-2^{2a}-2^{3a}-\cdots-2^{(b-1)a}\\ \hline & -1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +2^{ba}\end{array}$$

数学 II の二項定理と数学 B の数列を学習しないとイメージがつかめないかもしれません。$b=3$ (指数が 3 の倍数) のときの式を書いておきます。

$$\begin{aligned}&2^{3a}-1\\&=(2^a)^3-1\\&=(2^a-1)\{(2^a)^2+2^a+1\}\\&=(2^a-1)(1+2^a+2^{2a})\end{aligned}$$

メルセンヌ素数を作る指数の素数は整数列大辞典 $A000043$ にあります。

$$2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, \cdots$$

2.3.6.7　完全数が三角数なのはなぜ？

完全数はすべて自然数を順に加えてできる三角数です。

$$\begin{aligned}6&=1+2+3\\28&=1+2+3+4+5+6+7\\496&=1+2+3+4+5+6+7+8+9+\cdots+31\end{aligned}$$

どうしてでしょう？ 現在発見されている完全数はすべて偶数で $2^{p-1}(2^p-1)$ の形です。奇数の完全数は発見されていないので完全数はこの数式の形の数ということで話を進めていきます。

三角数は数学 B で学習する $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$ で表せます。

では完全数を導き出すことができる $2^{n-1}(2^n-1)$ はこの形になるのか，やってみましょう。

$$\begin{aligned}M=2^n-1\ &\text{とおくと}\\2^n&=M+1\\2^{n-1}&=\frac{M+1}{2}\\2^{n-1}\cdot(2^n-1)&=\frac{M+1}{2}\cdot M\\&=\frac{M(M+1)}{2}\end{aligned}$$

式は全く異なるのに完全数の $2^{n-1}(2^n-1)$ から求めることができる数はすべて三角数の中に含まれることを示すことができました。三角数は整数列大辞典 $A000217$ にあります。

$$1, 3, \mathbf{6}, 10, 15, 21, \mathbf{28}, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, \cdots$$

2.3.6.8　完全数と奇数の立方和

完全数は最初の 6 を除いて奇数の立方和で表される性質があります。例えば

$$28 = 1^3 + 3^3$$
$$496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$$

です。どうして 6 以外の完全数は奇数の立方和で表せるのでしょうか？

奇数の立方和は
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 &= \sum_{k=1}^{n}(8k^3 - 12k^2 + 6k - 1)\\
&= 8\sum_{k=1}^{n}k^3 - 12\sum_{k=1}^{n}k^2 + 6\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1\\
&= 8\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 - 12\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n\\
&= 2n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) - n\\
&= n\{2n(n+1)^2 - 2(n+1)(2n+1) + 3(n+1) - 1\}\\
&= n(2n^3 + 4n^2 + 2n - 4n^2 - 6n - 2 + 3n + 3 - 1)\\
&= n(2n^3 - n)\\
&= n^2(2n^2 - 1)
\end{aligned}$$

この式で表される数が奇数の立方和になります。では完全数を表す数式 $2^{n-1}(2^n - 1)$ はこの形になるのか，やってみましょう。

p を $p \geqq 3$ の素数とすると
$2^{p-1}\cdot(2^p - 1) = 2^{p-1}\cdot(2\cdot2^{p-1} - 1)$
メルセンヌ素数の指数は素数と $p \geqq 3$ より $p-1$ は偶数である。
$p - 1 = 2m$ とすると
$$= 2^{2m}\cdot(2\cdot2^{2m} - 1))$$
$$= (2^m)^2\cdot\{2\cdot(2^m)^2 - 1\}$$
ここで $2^m = n$ とおくと
$$= n^2(2n^2 - 1)$$

ここで疑問が浮かびます。どうして 6 は奇数の立方和で表すことのできない唯一の完全数なのでしょう。数式から考察してみましょう。

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = n^2(2n^2 - 1) \text{ より}$$
ここで n^2 を m とおくと
$$a_m = m(2m - 1)$$

ここで $m = 2^{p-1}$ とすると完全数を表す式になります。完全数 6 の場合は $m = 2$ より $n^2 = 2$ から $n > 0$ より $n = \sqrt{2}$ になり，整数にならないことから奇数の立方和で表すことができません。この奇数の立方和の式 $n^2(2n^2 - 1)$ に $n = 2^{\frac{p-1}{2}}$ を代入すると完全数を求める標準形の式になります。$\dfrac{p-1}{2} \geqq 1$ から $p \geqq 3$ が導きだされることからも 6 は含まないこともわかります。この奇数の立方和 (すべて三角数) の数列は整数列大辞典 $A002593$ にあります。

1, **28**, 153, **496**, 1225, 2556, 4753, **8128**, 13041, $\cdots$

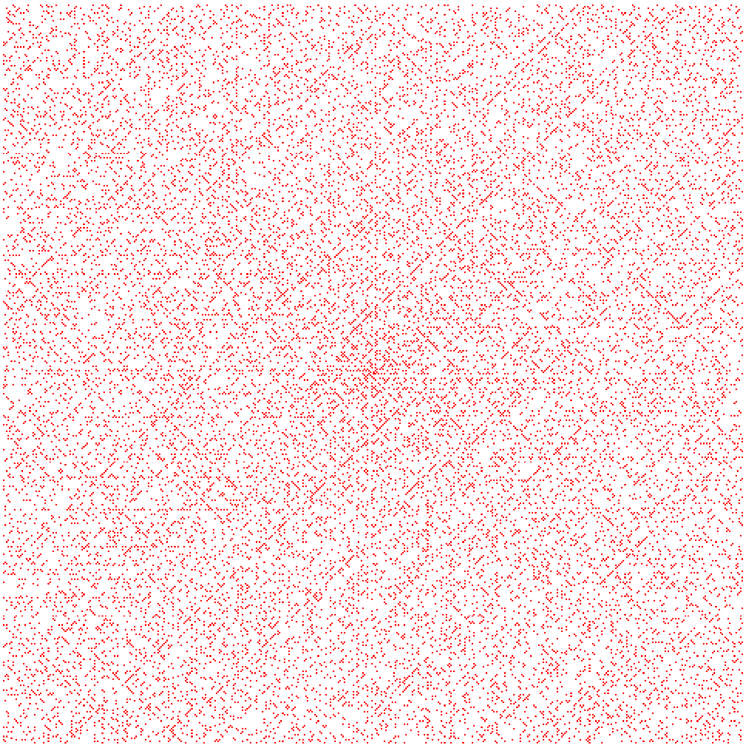
2.3.9 ウラムの螺旋 (Ulam spiral) (資料 P64 参照)

素数を勉強していったら「ウラムの螺旋」に出会いました。下の表のように 1 を取り囲むようにして数を並べ素数をマークしていきます。

……	143	142	141	140	139	138	137	136	135	134	133
101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	132
102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90	131
103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89	130
104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88	129
105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87	128
106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86	127
107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85	126
108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84	125
109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83	124
110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	123
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122

2.3.9.1 ウラムの螺旋 (素数)

下の図はコンピュータグラフィックで 1 ピクセルあたりに 1 つの数を対応させた図 (480×480) です。約 23 万個の数キャンバスに約 20000 個の素数を描いた絵です。この絵を見てどんなことを感じますか？ 線が見えるということはそこには数学的な性質があるということです。



2.3.9.2　ウラムの螺旋 (1-1024) 模範解答

(資料 P65 参照)

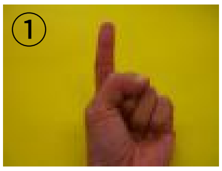
ウラムの螺旋 (1-1024)　HRNO＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿

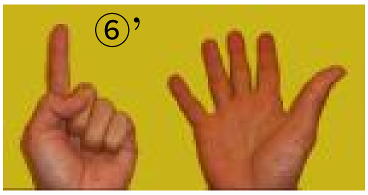
1024	1023	1022	1021	1020	1019	1018	1017	1016	1015	1014	1013	1012	1011	1010	1009	1008	1007	1006	1005	1004	1003	1002	1001	1000	999	998	997	996	995	994	993
901	900	899	898	897	896	895	894	893	892	891	890	889	888	887	886	885	884	883	882	881	880	879	878	877	876	875	874	873	872	871	992
902	785	784	783	782	781	780	779	778	777	776	775	774	773	772	771	770	769	768	767	766	765	764	763	762	761	760	759	758	757	870	991
903	786	677	676	675	674	673	672	671	670	669	668	667	666	665	664	663	662	661	660	659	658	657	656	655	654	653	652	651	756	869	990
904	787	678	577	576	575	574	573	572	571	570	569	568	567	566	565	564	563	562	561	560	559	558	557	556	555	554	553	650	755	868	989
905	788	679	578	485	484	483	482	481	480	479	478	477	476	475	474	473	472	471	470	469	468	467	466	465	464	463	552	649	754	867	988
906	789	680	579	486	401	400	399	398	397	396	395	394	393	392	391	390	389	388	387	386	385	384	383	382	381	462	551	648	753	866	987
907	790	681	580	487	402	325	324	323	322	321	320	319	318	317	316	315	314	313	312	311	310	309	308	307	380	461	550	647	752	865	986
908	791	682	581	488	403	326	257	256	255	254	253	252	251	250	249	248	247	246	245	244	243	242	241	306	379	460	549	646	751	864	985
909	792	683	582	489	404	327	258	197	196	195	194	193	192	191	190	189	188	187	186	185	184	183	240	305	378	459	548	645	750	863	984
910	793	684	583	490	405	328	259	198	145	144	143	142	141	140	139	138	137	136	135	134	133	182	239	304	377	458	547	644	749	862	983
911	794	685	584	491	406	329	260	199	146	101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	132	181	238	303	376	457	546	643	748	861	982
912	795	686	585	492	407	330	261	200	147	102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90	131	180	237	302	375	456	545	642	747	860	981
913	796	687	586	493	408	331	262	201	148	103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89	130	179	236	301	374	455	544	641	746	859	980
914	797	688	587	494	409	332	263	202	149	104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88	129	178	235	300	373	454	543	640	745	858	979
915	798	689	588	495	410	333	264	203	150	105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87	128	177	234	299	372	453	542	639	744	857	978
916	799	690	589	496	411	334	265	204	151	106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86	127	176	233	298	371	452	541	638	743	856	977
917	800	691	590	497	412	335	266	205	152	107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85	126	175	232	297	370	451	540	637	742	855	976
918	801	692	591	498	413	336	267	206	153	108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84	125	174	231	296	369	450	539	636	741	854	975
919	802	693	592	499	414	337	268	207	154	109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83	124	173	230	295	368	449	538	635	740	853	974
920	803	694	593	500	415	338	269	208	155	110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	123	172	229	294	367	448	537	634	739	852	973
921	804	695	594	501	416	339	270	209	156	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	171	228	293	366	447	536	633	738	851	972
922	805	696	595	502	417	340	271	210	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	227	292	365	446	535	632	737	850	971
923	806	697	596	503	418	341	272	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	291	364	445	534	631	736	849	970
924	807	698	597	504	419	342	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	363	444	533	630	735	848	969
925	808	699	598	505	420	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	443	532	629	734	847	968
926	809	700	599	506	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	531	628	733	846	967
927	810	701	600	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	627	732	845	966
928	811	702	601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	731	844	965
929	812	703	704	705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	843	964
930	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	963
931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960	961	962

2.3.10　数の数え方

一昔前「n 進法」の教材は中学校で指導した時期があった。現在は数学 A に移行している。自分の指を使って 2 進数で数を数える教材である。

まずはウオーミングアップをかねて，右手で 1 から 6 まで数えるといい。教師が「6！」って言った瞬間に右手の親指を折ることができれば，日本人の子ですね。下に図を載せたが，このとき左手を使って数える (右図⑥') 民族がいることを話すといいだろう。(世界においてはこちらの方が大勢を占める。) いいかえれば指を折って数を数えることができる (左図⑥) 民族 (日本人) の方が珍しいのである。(このことは国際関係の学部の先生から聞いた話です。)





さて右手を使ったウオーミングアップがすんだら本題に入ろう。こんどは左手で数えていく。右手でもいいのだが，左手の方が位上がりが左から右に動くためわかりやすいと思う。左手の手のひらを自分の方に向けて数えていく。この左手は 5 ビットのコンピュータにあたる。

自分が演示するときは左手の手のひらの方を生徒に向けて演示している。こうすれば生徒にとっては教師と同じ指が立っているかどうかがすぐわかるためである。教師の数の声と合わせて立たせる指の名前を言ってあげるのがいいだろう。

「1(いち)。小指を立てて〜」，「2(に)。小指折って，薬指立てて〜」

数え始めれば器用に指が動く生徒もいれば，何がなんだかわからず「どうやったらこの指が動くんだ〜。」と叫ぶ生徒もいる。2 回か 3 回位繰り返してやってみてください。

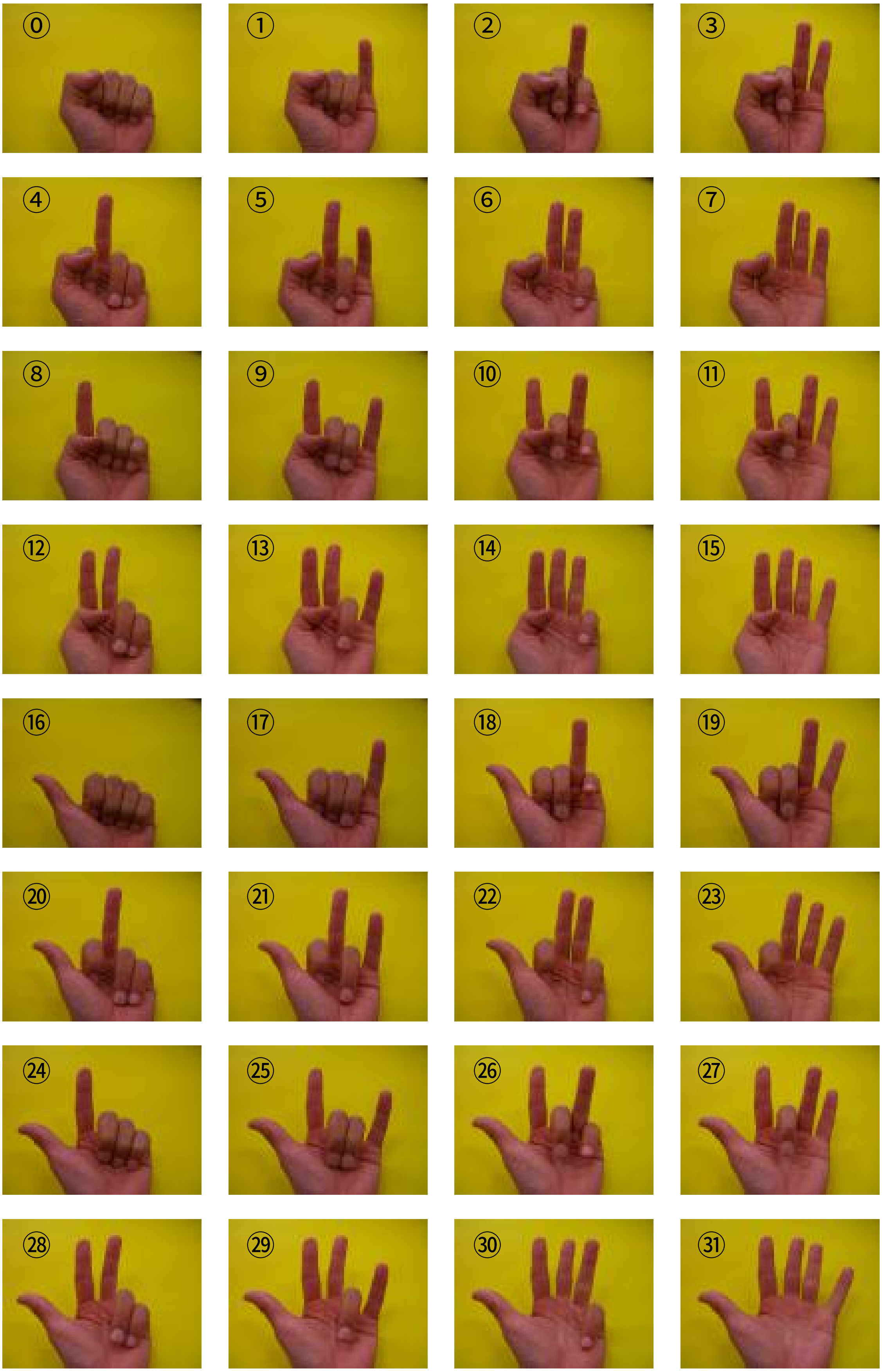
自分の大学時代は 8 ビットのコンピューター (マイコンって言いました。) の出始めで，機械語の命令でプログラムを作ったとき指折って数えたものである。そのためか左手はけっこう器用に動いてくれる。

手の動きと 2 進数と 16 進数の関係を載せておこう。0 が指を折った状態で，1 が指を立てたときを表している。そして親指，人差し指，中指，薬指，小指の順である。

$0=0_{(16)}=00000_{(2)}$	$1=1_{(16)}=00001_{(2)}$	$2=2_{(16)}=00010_{(2)}$	$3=3_{(16)}=00011_{(2)}$
$4=4_{(16)}=00100_{(2)}$	$5=5_{(16)}=00101_{(2)}$	$6=6_{(16)}=00110_{(2)}$	$7=7_{(16)}=00111_{(2)}$
$8=8_{(16)}=01000_{(2)}$	$9=9_{(16)}=01001_{(2)}$	$10=\mathrm{A}_{(16)}=01010_{(2)}$	$11=\mathrm{B}_{(16)}=01011_{(2)}$
$12=\mathrm{C}_{(16)}=01100_{(2)}$	$13=\mathrm{D}_{(16)}=01101_{(2)}$	$14=\mathrm{E}_{(16)}=01110_{(2)}$	$15=\mathrm{F}_{(16)}=01111_{(2)}$
$16=10_{(16)}=10000_{(2)}$	$17=11_{(16)}=10001_{(2)}$	$18=12_{(16)}=10010_{(2)}$	$19=13_{(16)}=10011_{(2)}$
$20=14_{(16)}=10100_{(2)}$	$21=15_{(16)}=10101_{(2)}$	$22=16_{(16)}=10110_{(2)}$	$23=17_{(16)}=10111_{(2)}$
$24=18_{(16)}=11000_{(2)}$	$25=19_{(16)}=11001_{(2)}$	$26=1\mathrm{A}_{(16)}=11010_{(2)}$	$27=1\mathrm{B}_{(16)}=11011_{(2)}$
$28=1\mathrm{C}_{(16)}=11100_{(2)}$	$29=1\mathrm{D}_{(16)}=11101_{(2)}$	$30=1\mathrm{E}_{(16)}=11110_{(2)}$	$31=1\mathrm{F}_{(16)}=11111_{(2)}$

ある学校の「情報」の授業でこの教材を扱っていた。なぜか嬉しくなりました。

2.3.10.1　左手は 5bit のコンピュータ



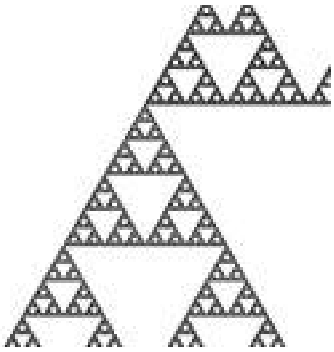
第3章　数学 II

3.1　式と証明

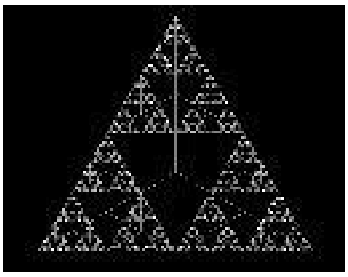
3.1.1　パスカルの三角形

3.1.1.3　シェルピンスキーのギャスケット

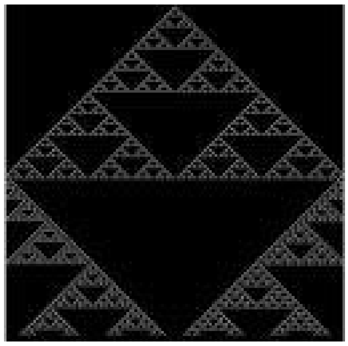
2色塗りの模様はシェルピンスキーのギャスケットとして有名です。Wikipedia にはアニメーションがあります。ぜひ紹介してほしいのでそのアニメーションを紹介します。



(1)自己相似図形のフラクタル図形のイメージがよくわかるアニメーションです。ファイル場所は Wikipedia の"シェルピンスキーのギャスケット"



(2)シェルピンスキーのギャスケットの重心で分割,回転してフラクタルツリーができるアニメーションです。ファイル場所は Wikipedia の"フラクタル"を選択し言語版から"English"を選択します。



(3)ルール90というセル･オートマトン命令の変換からできるシェルピンスキーのギャスケットのアニメーションです。ファイル場所はWikipediaの"シェルピンスキーのギャスケット"

3.1.2　数表を使って授業しよう！

数表を使って九九に登場する数や素数，累乗数，楔数等を紹介してきたが，高校生にはもう少し高級感のある課題を選んでみた。授業で扱ってもいいのだがやや時間がかかると思う。課題学習としてどうだろう。

3.1.2.1　異なる数の平方和で表せる整数

問. 自然数を平方の和で表すことに挑戦します。例えば 14 は $1^2 + 2^2 + 3^3$ と表すことができます。$1^2, 2^2, 3^2, 4^2$ の 4 種類を使ってでどんな数が表すことができるか調べなさい。ただし同じ平方数を 2 回使ってはいけません。

問題の意味をつかませる課題です。これは簡単ですね。

1 種類　$1^2 = \underline{1},\ 2^2 = \underline{4},\ 3^2 = \underline{9},\ 4^2 = \underline{16}$

2 種類　$1^2 + 2^2 = \underline{5},\ 1^2 + 3^2 = \underline{10},\ 1^2 + 4^2 = \underline{17},\ 2^2 + 3^2 = \underline{13},\ 2^2 + 4^2 = \underline{20},\ 3^2 + 4^2 = \underline{25}$

3 種類　$1^2 + 2^2 + 3^2 = \underline{14},\ 1^2 + 2^2 + 4^2 = \underline{21},\ 1^2 + 3^2 + 4^2 = \underline{26},\ 2^2 + 3^2 + 4^2 = \underline{27}$

4 種類　$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \underline{30}$

といったことで 15 個の数が表すことができるとわかりました。問題の意味がわかったここからが本時のスタートです。

問. 15 個の数が表すことがわかったんだけど，5^2 を使ってもいいとすると何個増えるんだろう？

1 種類　$5^2 = 25$

2 種類　$5^2 + 1^2 = 26$　$5^2 + 2^2 = 29$　$5^2 + 3^2 = \underline{34}$　$5^2 + 4^2 = \underline{41}$

3 種類　$5^2 + 1^2 + 2^2 = 30$　$5^2 + 1^2 + 3^2 = \underline{35}$　$5^2 + 1^2 + 4^2 = \underline{42}$　$5^2 + 2^2 + 3^2 = \underline{38}$
$5^2 + 2^2 + 4^2 = \underline{45}$　$5^2 + 3^2 + 4^2 = \underline{50}$

4 種類　$5^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = \underline{39}$　$5^2 + 1^2 + 2^2 + 4^2 = \underline{46}$
$5^2 + 1^2 + 3^2 + 4^2 = \underline{51}$　$5^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \underline{54}$

5 種類　$5^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \underline{55}$

調べた数は 16 個だったけど，前に出てきた数が 4 個あったから 12 個増えて 27 個が正解なんだけど，どうかな正解までたどり着けたかな。

問. もうすこしがんばってみようか，6^2 を使ってもいいとすると何個になるんだろう？

1 種類　$6^2 = \underline{36}$

2 種類　$6^2 + 1^2 = \underline{37}$　$6^2 + 2^2 = \underline{40}$　$6^2 + 3^2 = 45$　$6^2 + 4^2 = \underline{52}$
$6^2 + 5^2 = \underline{61}$

3 種類　$6^2 + 1^2 + 2^2 = 41$　$6^2 + 1^2 + 3^2 = 46$　$6^2 + 1^2 + 4^2 = \underline{53}$　$6^2 + 1^2 + 5^2 = \underline{62}$
$6^2 + 2^2 + 3^2 = \underline{49}$　$6^2 + 2^2 + 4^2 = \underline{56}$　$6^2 + 2^2 + 5^2 = \underline{65}$　$6^2 + 3^2 + 4^2 = 61$
$6^2 + 3^2 + 5^2 = \underline{70}$　$6^2 + 4^2 + 5^2 = \underline{77}$

4 種類　$6^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 50$　$6^2 + 1^2 + 2^2 + 4^2 = \underline{57}$　$6^2 + 1^2 + 2^2 + 5^2 = \underline{66}$
$6^2 + 1^2 + 3^2 + 4^2 = 62$　$6^2 + 1^2 + 3^2 + 5^2 = \underline{71}$　$6^2 + 1^2 + 4^2 + 5^2 = \underline{78}$
$6^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 65$　$6^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = \underline{74}$　$6^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 = \underline{81}$
$6^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \underline{86}$

5 種類　$6^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 66$　$6^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = \underline{75}$
$6^2 + 1^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 = \underline{82}$　$6^2 + 1^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \underline{87}$
$6^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \underline{90}$

6 種類　$6^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \underline{91}$

今度は 24 個増えて 51 個が正解でした。10^2 まで計算するとこの平方数を使った数の正体がわかるけど，時間内にはできないから出てきた数を数表にまとめてみましょう。(表 1 参照)

表 1

十＼一	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	○			○	○				○	○
10			○	○		○	○			○
20	○				○	○			○	○
30				○	○	○	○	○	○	○
40	○	○			○	○			○	○
50	○	○	○	○	○	○	○			
60	○	○			○	○				○
70	○			○	○		○	○		
80	○	○				○	○			○
90	○									

3.1.2.2 $1^2 \sim 7^2$ で表すことができる数

表 $1'$

十＼一	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	○	・	・	○	○	・	・	・	○	○
10	・	・	○	○	・	○	○	・	・	○
20	○	・	・	・	○	○	・	・	○	○
30	・	・	・	○	○	○	○	○	○	○
40	○	○	・	・	○	○	・	・	○	○
50	○	○	○	○	○	○	○	○	○	・
60	○	○	○		○	○	・		○	○
70	○	・		○	○	・	○	○	○	
80	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
90	○	・		○	○	・		○	○	○

表 2

十＼一	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
100	○	○	○	○	○	○		・		○
110	○	・		○	○				○	○
120			○	○		○	○	・		○
130	○				○	○				
140									○	○
150										
160										
170										
180										
190										

3.1.2.3 $1^2 \sim 8^2$ で表すことができる数

表 $1''$

十＼一	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	○	・	・	○	○	・	・	・	○	○
10	・	・	○	○	・	○	○	・	・	○
20	○	・	・	・	○	○	・	・	○	○
30	・	・	・	○	○	○	○	○	○	○
40	○	○	・	・	○	○	・	・	○	○
50	○	○	○	○	○	○	○	○	○	・
60	○	○	○	○	○	○	・	○	○	○
70	○	・	○	○	○	・	○	○	○	○
80	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
90	○	・	○	○	○	・		○	○	○

表 $2'$

十＼一	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
100	○	○	○	○	○	○		・	○	○
110	○	・	○	○	○	○	○	○	○	○
120	○	○	○	○	○	○	○	・	○	○
130	○		○	○	○	○		○	○	○
140	○	○	○		○	○	○	○	○	○
150	○	○	○	○	○			○	○	
160		○	○	○	○	○	○	○	○	○
170				○	○			○	○	
180			○	○			○	○		○
190	○			○	○				○	○

表 3

十＼一	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
200			○	○						
210										
220										
230										
240										
250										
260										
270										
280										
290										

3.1.2.4 $1^2 \sim 10^2$ で表すことができる数

表 $2''$

十＼一	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
100	○	○	○	○	○	○	○	・	○	○
110	○	・	○	○	○	○	○	○	○	○
120	○	○	○	○	○	○	○	・	○	○
130	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
140	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
150	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
160	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
170	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
180	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
190	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

表 $3'$

十＼一	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
200	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
210	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
220	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
230	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
240	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
250	○	○	○	○	○	○		○	○	○
260	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
270	○	○		○	○	○		○	○	○
280	○	○	○	○	○	○	○	○		○
290	○	○		○	○	○	○	○	○	○

表 4

十＼一	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
300	○	○	○	○	○	○	○	○		○
310	○	○		○	○	○	○		○	○
320	○	○	○	○		○	○	○	○	○
330	○	○	○	○	○	○			○	○
340			○	○	○	○	○	○	○	○
350	○				○	○			○	○
360				○	○			○	○	
370	○	○			○	○				○
380	○			○	○					
390										

3.1.2.5 平方数を使って表すことができない最大整数 128

ここまでやると，平方数を使って表すことができない最大整数は 128 であることがわかる。というのは 10^2 までの考察で，129〜256 までの数が表すことができるので，これに 11^2 を加えた 250〜377 までの数は自動的に表すことが可能になる。よって 11^2 を使うと 129〜377 までが表すことができる。さらに 12^2 を加えると 273〜521 まで可能なので結果 129〜521 まで表すことができる。さらに 13^2 を……，といった具合である。

表すことができない数は 31 個あり，小さい順に $2, 3, 6, 7, 8, 11, 12, 15, 18, 19, 22, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 33, 43, 44, 47, 48, 60, 67, 72, 76, 92, 96, 108, 112, 128$ である。(整数列大辞典 $A001422$)

生徒の実態によってはこの最大数を考えさせても面白いと感じる。

3.5 指数関数と対数関数

3.5.3 ベンフォードの法則

「ベンフォードの法則」ってご存じですか？ ある数値の最初の桁の数は 1 が最も多く，その先頭の桁の数が増えるごとに出現割合は徐々に減っていって，9 を先頭とする数が最も少ないという法則です。確かめてみましょう。

問. 2^n において桁数を m とするとき最初の桁の数が 1 になるときの区間を m を用いて表しなさい。またこのときの n の範囲を m を用いて表しなさい。

$$1 \times 10^{m-1} \leqq 2^n < 2 \times 10^{m-1}$$

底が 10 の対数をとると

$$\log(1 \times 10^{m-1}) \leqq \log 2^n < \log(2 \times 10^{m-1})$$

$$\log 10^{m-1} \leqq n \log 2 < \log 2 + \log 10^{m-1}$$

$$\frac{m-1}{\log 2} \leqq n < \frac{\log 2 + m - 1}{\log 2}$$

上の式から最初の桁の数が 1 になる区間幅は桁数 m とは関係なく 1 になることがわかります。同様にして最初の桁の数が 2 になる区間幅はどうなるのでしょう？

$$2 \times 10^{m-1} \leqq 2^n < 3 \times 10^{m-1}$$

底が 10 の対数をとると

$$\log(2 \times 10^{m-1}) \leqq \log 2^n < \log(3 \times 10^{m-1})$$

$$\log 2 + \log 10^{m-1} \leqq n \log 2 < \log 3 + \log 10^{m-1}$$

$$\frac{\log 2 + m - 1}{\log 2} \leqq n < \frac{\log 3 + m - 1}{\log 2}$$

最初の桁の数が 2 の区間幅は $\frac{\log 3 - \log 2}{\log 2}$ になります。最初の桁が a になるときの区間幅を x_a としてまとめてみると

区間	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
区間幅	1	$\frac{\log 3 - \log 2}{\log 2}$	$\frac{\log 4 - \log 3}{\log 2}$	$\frac{\log 5 - \log 4}{\log 2}$	$\frac{\log 6 - \log 5}{\log 2}$	$\frac{\log 7 - \log 6}{\log 2}$	$\frac{\log 8 - \log 7}{\log 2}$	$\frac{\log 9 - \log 8}{\log 2}$	$\frac{1 - \log 9}{\log 2}$

区間幅の合計が $\frac{1}{\log 2}$ になることから，それぞれの区間の割合を求めてみると

区間	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
割合	$\log 2$	$\log 3 - \log 2$	$\log 4 - \log 3$	$\log 5 - \log 4$	$\log 6 - \log 5$	$\log 7 - \log 6$	$\log 8 - \log 7$	$\log 9 - \log 8$	$1 - \log 9$
近似値	0.301	0.176	0.125	0.097	0.079	0.067	0.058	0.051	0.046

3^n について同様にまとめ割合を求めると

区間	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
区間幅	$\frac{\log 2}{\log 3}$	$\frac{\log 3 - \log 2}{\log 3}$	$\frac{\log 4 - \log 3}{\log 3}$	$\frac{\log 5 - \log 4}{\log 3}$	$\frac{\log 6 - \log 5}{\log 3}$	$\frac{\log 7 - \log 6}{\log 3}$	$\frac{\log 8 - \log 7}{\log 3}$	$\frac{\log 9 - \log 8}{\log 3}$	$\frac{1 - \log 9}{\log 3}$

区間幅の合計が $\frac{1}{\log 3}$ になることから，割合は 2^n のときと同じということがわかる。

こんな問題を解かせると対数に対する理解が深まるんじゃないかなぁ〜。

3.5.3.1 ベンフォードの法則を感じるための数値データ

授業で扱う場合には生徒が持っている理科や社会の資料集の中の数値データを最初に扱うと生徒の興味関心が増すだろう。実際 2012 年の数学セミナーには理科年表の基礎物理定数や加工食品の生産量，OECD 内の国内総生産等の具体的な数値データが載っています。

何かの数値データの先頭の数の分布を調べさせた後，その分布の様子 (最上位の数) が現在学習している対数を用いた数で表される驚き，そしてその法則を自分の力で証明することができることいろいろな可能性をもつ教材です。

例えば下のデータは私が (m,k)-完全数の m をみつけるために必要になった約 20000 個の 7 桁〜229 桁の素数の先頭の数です。

先頭数字	個数	割合	理論値	誤差
1	6046	0.3102	0.3010	0.0092
2	3510	0.1801	0.1761	0.0040
3	2386	0.1224	0.1249	−0.0025
4	1847	0.0948	0.0969	−0.0021
5	1532	0.0786	0.0792	−0.0006
6	1278	0.0656	0.0669	−0.0013
7	1056	0.0542	0.0580	−0.0038
8	971	0.0498	0.0512	−0.0014
9	866	0.0444	0.0458	−0.0014
合計	19492	1.0001	1	0.0001

もっと基本的なデータとして初項 1 公比 2 の等比数列 (整数列大辞典：A000244) がある。下のデータはこの数列の 100 項までと 1000 項までをまとめた表である。

先頭数字	第 100 項まで				第 1000 項まで			
	個数	割合	理論値	誤差	個数	割合	理論値	誤差
1	30	0.3	0.30	0	301	0.301	0.301	0
2	17	0.17	0.18	−0.01	176	0.176	0.176	0
3	13	0.13	0.12	0.01	125	0.125	0.125	0
4	10	0.1	0.10	0	97	0.097	0.097	0
5	7	0.07	0.08	−0.01	79	0.079	0.079	0
6	7	0.07	0.07	0	69	0.069	0.067	0.002
7	6	0.06	0.06	0	56	0.056	0.058	−0.002
8	5	0.05	0.05	0	52	0.052	0.051	0.001
9	5	0.05	0.05	0	45	0.045	0.046	−0.001
合計	100	1	1.01	−0.01	1000	1	1	0

この法則は意外とすごいと感じました。数は 1 に支配されているということなのか…。

(参考文献 数学セミナー 2012 年 8 月号，2013 年 1 月号)

3.5.4　感動を数値で表そう！　(本文 P62 参照)

3.5.4.1　1 杯目のビールの幸せ

堀口先生　1 杯目のビールは美味しいのに 2 杯目のビールが美味しいとはあまり感じません。個人的には。

マリさん　わかります（笑）。

堀口先生　ここで，$y = \log_e x$ のグラフをかいてみます。ただし，関数の形はわかりやすいようにちょっと変形をしています $y = \dfrac{1}{\log_e 2}\cdot\log_e(x+1)$ という式です。e はネイピア数とよばれています。2.7 くらいの数です。数学的に非常に扱いやすいため，数学ではたくさん登場します。

マリさん　えっとこのグラフ (図 1) はどうみればよいのですか？

堀口先生　$x = 1$ のとき，$y = 1$ になることは確認できますね。ここから，x が 1 ずつ増える毎に y の値が増えていくのは確認できるでしょうか？

マリさん　はい。

堀口先生　$x = 1$ になるとき，ビールの 1 杯目を飲んだと考えます。そうなると，y が 0 から 1 に増えるので，1 杯目の"幸せ"を 1 と表現できるわけです。

マリさん　なるほど！ でも，なぜ log を考えたんですか？

堀口先生　「**ヴェーバー･フェヒナーの法則**」（編集部注 : 人間の感覚の大きさは受ける刺激の強さの対数に比例するという法則）ですね。人の感覚は，log でしたよね。さて，2 杯目についてとらえていきましょうか。$x = 2$ になるとき，$y = 1.585$ くらいとなりますから，ビール 2 杯の幸せの合計は 1.585 です。うち，2 杯目の幸せは，y の増加分ですので，0.585 くらいになりますね。先ほどより減っています。

マリさん　たしかに，2 杯目も美味しいですが，ただ，1 杯目と比べれば 6 割くらいになるわけですね。

堀口先生　この表 (表 1 : 次頁参照) をグラフ (図 2) にすると以下のようになります

マリさん　10 杯目以降なんて，ほとんど幸せにはならないですね（笑）。

堀口先生　もちろん，人にはよるとは思いますが。人によっては「10 杯目だって美味しい！」と主張される方もいらっしゃることでしょう。これを見ると，ビールは 1 杯目だけでよいかもしれませんね（笑）。実は，これ，「**限界効用逓減の法則**」とよばれています。「1 増える」毎の幸せの増え具合は少しずつ減るというもので，いろんな物事に適用できるんですよ。

「1 杯目のビールが美味しい理由を数学的に証明してみました。」堀口 智之 著 発行 幻冬舎 より抜粋および加筆

図 1．1 杯目のビールの幸せ積算グラフ

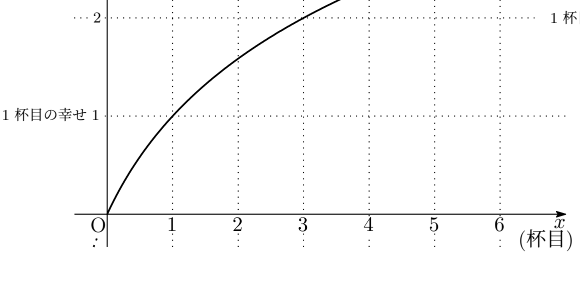
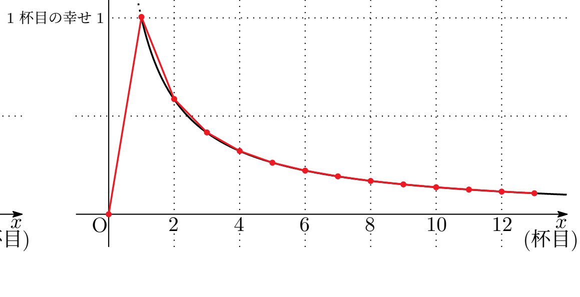


図 2．1 杯目のビールの幸せ比較グラフ



3.5.4.2 高校生に感じさせたい 1 杯目のビールの幸せ

前頁の図 1 の 1 杯目のビールの幸せ積算グラフと図 2 の 1 杯目のビールの幸せ比較グラフでは座標軸の目盛りの基準が異なり 2 倍のスケールになっています。y 軸の目盛りにある"1 杯目の幸せ"の値 $x = 1$ のとき $y = 1$ を基準にグラフを比較してください。また図 2 の 1 杯目のビールの幸せ比較グラフにおいて原点と (1 杯目,1 杯目の幸せ) を結んでいいかは疑問の残るところだが，なかった幸せが生まれたということで線で結ぶことをお許し願いたい。グラフで表したが数値を使うと以下のようになる。図 1 の幸せ積算は $y = f(x) = \frac{\log(x+1)}{\log 2}$ の値で，図 2 の幸せ比較は $y = g(x) = \frac{\log(x+1)-\log x}{\log 2}$ の値である。

表 1. x 杯目の幸せ積算・幸せ比較対応表

x 杯目	$f(x)$: 幸せ積算	$g(x)$: 幸せ比較
0	0	−−
1	1.000	1.000
2	1.585	0.585
3	2.000	0.415
4	2.322	0.322
5	2.585	0.263
6	2.807	0.222
7	3.000	0.193
8	3.170	0.170
9	3.322	0.152
10	3.459	0.138
11	3.585	0.126
12	3.700	0.115
13	3.807	0.107

2 杯目のビールの感動は 1 杯目の約 6 割，3 杯目は 1 杯目の約 4 割になっている。感覚的にはそんな感じがする。しかしお酒が弱い，強いで x が変わりそうだ。お酒が弱い人は普通の人の 2 杯目が 3 杯目または 4 杯目以降の値を取りそうな感じがする。式で考えると幸せ積算の値が $y = \frac{\log(ax+1)}{\log 2}$ ということです。a の値 ($a \geqq 0$) には個人差があるということです。私は大学時代スポーツに汗を流した後，過ごしていた東京の水はあまり身体に良くないという理由から，自動販売機で買って飲んだライトビールのうまさの感動が今でも残っている。大人には理解できるといってもお酒をたしなまない人にはわからないが，この 1 杯目のビールの感動をどうやってお酒を飲むことができない未成年の高校生に伝えたらいいのだろうか。対数の感覚を伝える格好の教材なのに，何かビールに変わるものはないだろうか。テストの得点，何かの順位はいい得点やいい順位ばかりではないし……。次に教える機会があれば高校生に尋ねたいと思っています。

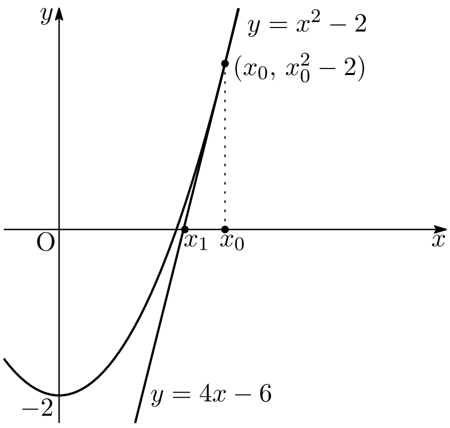
> 問. 今日の数学の授業は感動を数値で表したいと思っているんだけど，
> この頃の生活で何か感動したことある？

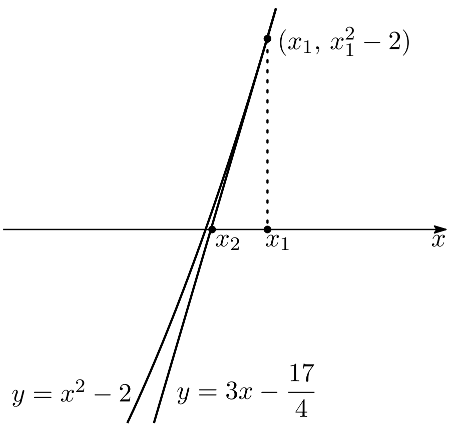
3.6 微分法と積分法

3.6.2 ニュートン法

微分法の学習のまとめで「ニュートン法」はどうだろうか。私は大学で学んだ教材だが，高校生にとっては多少面倒だが難問というレベルの問題ではないことはニュートン法を知っている先生だったら理解できると思う。知らない方もいると思うので概略から入ろう。

求めたい値，ここでは $\sqrt{2}$ で話を進める。まず求めたい値を $f(x)=0$ のとき与える関数を考える。この場合の関数は $f(x)=x^2-2$ である。最初は求めたい値の適当な近似値 x_0 から計算を始める。下にイメージのグラフを用意した。





左が通常のグラフで右が拡大したグラフである。x 軸の目盛りに注意して比較してください。黒板に簡単なグラフを書いて，点線を含む接線を 2 回ほど書けば，今求めている $\sqrt{2}$ に近づいている様子が理解できると思う。

n	x_n	x_n^2-2	$f'(x_n)$	直線の式	x 軸との交点 (x_{n+1})
0	2	4	4	$y=4x-6$	$\frac{3}{2}=\mathbf{1.}5$
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	3	$y=3x-\frac{17}{4}$	$\frac{17}{12}=\mathbf{1.41}666\cdots$
2	$\frac{17}{12}$	$\frac{1}{144}$	$\frac{17}{6}$	$y=\frac{17}{6}x-\frac{577}{144}$	$\frac{577}{408}=\mathbf{1.41421}5686\cdots$
3	$\frac{577}{408}$	$\frac{1}{166464}$	$\frac{577}{204}$	$y=\frac{577}{204}x-\frac{665857}{166464}$	$\mathbf{1.41421356237}46899\cdots$

このニュートン法は収束の仕方がかなり速い，といっても手計算では少し大変なので，電卓を用意するか，生徒が持っているタブレットの中の電卓を使った方が良いであろう。

$y=x^3-7$ を利用して $\sqrt[3]{7}$ を求めるニュートン法の結果を載せておく。

n	x_n	x_n^3-7	$f'(x_n)$	直線の式	x 軸との交点 (x_{n+1})
0	2	1	12	$y=12x-23$	$\frac{23}{12}=\mathbf{1.91}66666\cdots$
1	$\frac{23}{12}$	$\frac{71}{1728}$	$\frac{529}{48}$	$y=\frac{529}{48}x-\frac{18215}{864}$	$\mathbf{1.91293}8458\cdots$
2	1.912938458	0.00007986714954	10.97800063	略	$\mathbf{1.912931182}80006\cdots$

x_{n+1} と x_n の関係式は $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ になる。この関係式は意外なほど簡単に求められるので時間があれば考えさせたい。

第4章　数学 B

4.1　数列

4.1.2　和の記号$\sum$（シグマ）

数列の学習で$\sum$を学ぶ。ただこのときお上（かみ）の式が登場する。連続整数の累乗の差の式である。例えば自然数の平方和では$k^3-(k-1)^3=3k^2-3k+1$, 立方和では$k^4-(k-1)^4=4k^3-6k^2+4k-1$である。突然に出現する恒等式に抵抗を感じる生徒は少なくない。もっと自然にシグマの公式に接することができないのか，そんなことを感じました。

4.1.2.1　自然数の和

問. 次のような 1 から n までの自然数の和を求めなさい。
$$S=1+2+3+\cdots\cdots+n$$

$\sum$を学習する前には等差数列の指導は終わっている。ほとんどの生徒は $S=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ と答えるだろう。この問題を恒等式を用いて求めることから $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k$ の公式を感じさせたい。

$$k^2-(k-1)^2=2k-1$$

k に 1 から n までを順に代入すると

$k=1$　　$1^2-0^2=2\cdot1-1$

$k=2$　　$2^2-1^2=2\cdot2-1$

$k=3$　　$3^2-2^2=2\cdot3-1$

$\cdots\cdots$　　$\cdots\cdots\cdots$

$k=n$　　$n^2-(n-1)^2=2\cdot n-1$

これら n 個の等式の辺々加えると

$$n^2=2(1+2+3+\cdots\cdots+n)-n$$
$$n^2=2S-n$$
$$2S=n^2+n$$
$$S=\frac{1}{2}n(n+1)$$

4.1.2.2　自然数の平方和と立方和

自然数の和を恒等式を用いて解く方法を学習した後，平方和と立方和の指導になる。こちらは教科書に記述があるのでそちらを参照してほしい。とはいっても流れとして教材のまとめの式ぐらいないと体裁が悪いので書かせていただきたい。

(1) 平方和

問. 次のような 1 から n までの自然数の平方和を求めなさい。
$$S=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$$

$$S=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

(2) 立方和

問. 次のような 1 から n までの自然数の立方和を求めなさい。
$$S=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$$

$$S=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

4.1.2.3　自然数の 4 乗和

計算がやや大変だが，生徒の実態に応じて次の 4 乗和に挑戦させるのもいいだろう。因数分解で $2n+1$ の因数が登場するのでいい復習になる。

問. 次のような 1 から n までの自然数の 4 乗和を求めなさい。
$$S=1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4$$

$$k^5-(k-1)^5=5k^4-10k^3+10k^2-5k+1$$

k に 1 から n までを順に代入すると

$$\begin{array}{ll}
k=1 & 1^5-0^5=5\cdot1^4-10\cdot1^3+10\cdot1^2-5\cdot1+1\\
k=2 & 2^5-1^5=5\cdot2^4-10\cdot2^3+10\cdot2^2-5\cdot2+1\\
k=3 & 3^5-2^5=5\cdot3^4-10\cdot3^3+10\cdot3^2-5\cdot3+1\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\\
k=n & n^5-(n-1)^5=5\cdot n^4-10\cdot n^3+10\cdot n^2-5\cdot n+1
\end{array}$$

これら n 個の等式の辺々加えると

$$n^5=5(1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4)-10(1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3)$$
$$+10(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)-5(1+2+3+\cdots\cdots+n)+n$$

$$n^5=5S-10\sum_{k=1}^{n}k^3+10\sum_{k=1}^{n}k^2-5\sum_{k=1}^{n}k+n$$

$$5S=n^5+10\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-10\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$5S=\frac{n}{6}(6n^4+15n^3+10n^2-1)$$

$$5S=\frac{n}{6}(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)$$

$$5S=\frac{n}{6}(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)(6n^2+6n-2)$$

$$5S=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

$$S=\frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
 & 6 & 15 & 10 & 0 & -1 & -1\\
+) & & -6 & -9 & -1 & 1 & \\
\hline
 & 6 & 9 & 1 & -1 & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|r}
 & 6 & 9 & 1 & -1 & -\frac{1}{2}\\
+) & & -3 & -3 & 1 & \\
\hline
 & 6 & 6 & -2 & 0 &
\end{array}$$

生徒の実態にもよるが，計算終了時に達成感をかなり感じることができる課題である。指導法としてたいせつなことの 1 つに，教える教材の前後と生徒の実態を考え，教師自身がどこを指導するかを決めることである。教科書をみて立方和まで指導すればいいのか……，ではなくその前はどうなっているのか，次は……という教師としての教材の見方を養うことである。

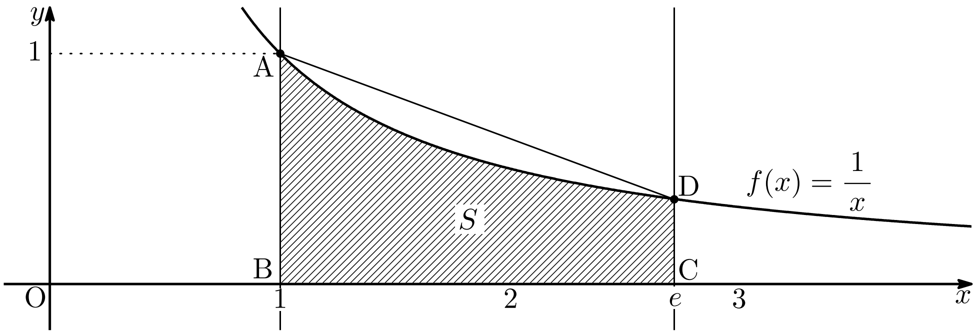
4.2　統計的な推測

4.2.1　自然対数の底 e

数学の世界において自然対数の底の e は円周率 π と並ぶ数にもかかわらず，ほとんどの生徒がその数に近づくことができないのでわずかであるが e を感じる教材を開発してみた。まず e の定義にはいろいろあるが生徒にとって最もわかりやすいのは反比例のグラフからの定義だと思う。反比例の $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフにおいて $x=1$ から x 軸とグラフで囲まれる面積 S が 1 になる数を e と定義して求めていく。(下図参照)

$$\left(\int_1^e \frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_1^e=\log e=1\right)$$

(1) 1 領域



最初に台形 ABCD の面積で求めたい面積 S を近似してその x 座標を求めてみる。上底を CD，下底を AB として，求めたい e の x 座標を k とすると高さは $k-1$ になることより

$$S=\left(\frac{1}{k}+1\right)\times(k-1)\times\frac{1}{2}=\frac{k^2-1}{2k}$$

この面積が 1 になることから　$\dfrac{k^2-1}{2k}=1$

$$k^2-2k-1=0$$

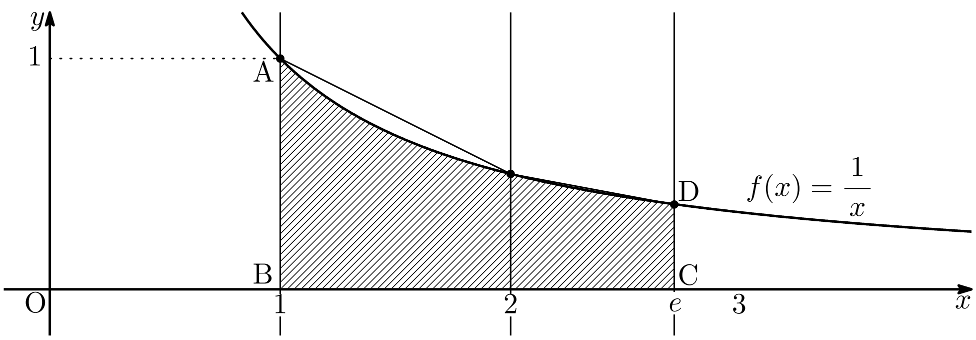
$$k=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}$$

$k>0$ より

$$k=1+\sqrt{2}\fallingdotseq 2.414213562\cdots\cdots$$

実際の e の値は 2.7182818284……なのでまだまだという感じ。さぁこれを出発点としてどこまで真の値に迫ることができるか挑戦開始である。

(2) 2 領域



$x=2$ の直線を追加し 2 分割して計算してみる。まず面積 S は

$$S=\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\right)\times(k-2)\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+1\right)\times1\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{k^2-4}{4k}+\frac{3}{4}$$

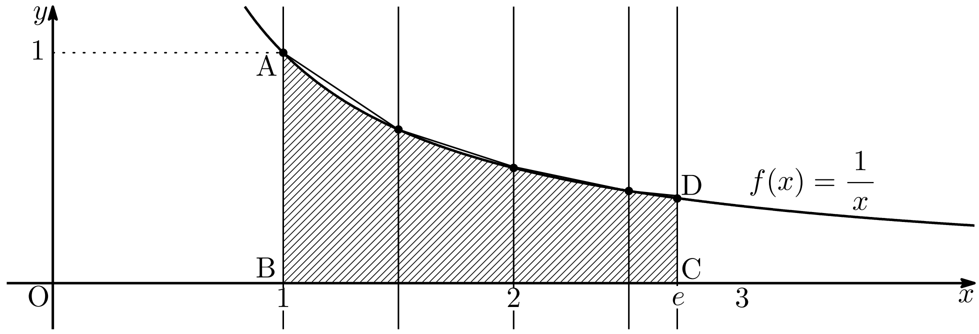
この面積が 1 になることから　$\dfrac{k^2-4}{4k}+\dfrac{3}{4}=1$

$$k^2-k-4=0$$
$$k=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1}$$

$k>0$ より　$=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\fallingdotseq 2.561552813\cdots\cdots$

まだまだだが，それでも近づいてはきている。さらに進めてみよう。

(3) 4 領域



$x=\dfrac{3}{2}$ と $x=\dfrac{5}{2}$ の直線を追加し 4 分割して計算してみる。まず面積 S は

$$S=\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{5}\right)\times\left(k-\frac{5}{2}\right)\times\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}+1\right)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{4k^2-25}{20k}+\frac{14}{15}$$

この面積が 1 になることから　$\dfrac{4k^2-25}{20k}+\dfrac{14}{15}=1$

$$12k^2-4k-75=0$$
$$k=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot12\cdot(-75)}}{2\cdot12}$$

$k>0$ より　$=\dfrac{1+\sqrt{226}}{2}\fallingdotseq 2.672216063\cdots\cdots$

いい感じになってきた。もうひとがんばりが必要みたいだ。これ以降は必要な情報のみでグラフは省略する。

(4) 7 領域

$x=\dfrac{5}{4}$ と $x=\dfrac{7}{4}$ と $x=\dfrac{9}{4}$ の直線を追加し 7 分割して計算してみる。まず面積 S は

$$S=\frac{4k^2-25}{20k}+\frac{58}{63}$$

この面積が 1 になることから　$\dfrac{4k^2-25}{20k}+\dfrac{58}{63}=1$

$$252k^2-100k-1575=0$$

$k>0$ より　$k\fallingdotseq 2.706273859\cdots\cdots$

誤差は 0.01200796984……である。まだ満足とはいえないが生徒の実態を考えると十分かもしれない。この後を書いておくと $x = \frac{9}{8}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}, \frac{15}{8}, \frac{17}{8}, \frac{19}{8}$ を追加し 13 個の領域での近似値は 2.715061266……，25 領域では 2.71727674152……となった。やればやるだけ真の値に近づくので生徒の実態に合わせて競争させるのもいいかもしれない。

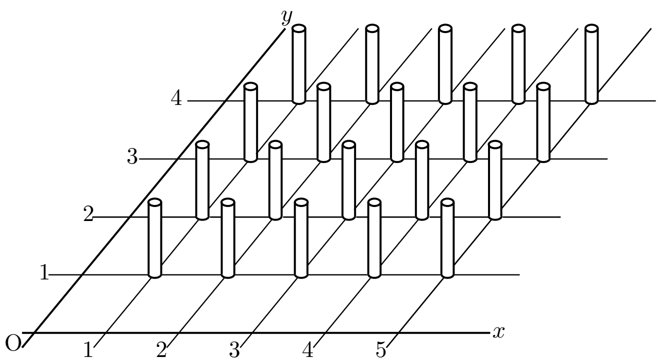
最後に e について書いておこう。数 e はジョン・ネイピア[1]が自然対数の底として発見したため，その功績から日本ではネイピア数と言われていた時期があった。しかし世界の大勢はオイラー数とよんでいる。これはオイラー[2]によって対数が再定義されためで e はオイラーの頭文字である。しかしオイラー数といっても何を示すのかが問題になるほどオイラーの功績があまりにも偉大であるため現在の日本では"自然対数の底"という言い方が主流である。

【教材の注意】

分割を細かくしていくと $\frac{5}{2} < x < e$ の間に分割線を引くことができることに気がつく。しかしこの部分を細かく分割すると k を用いた台形の高さが変わってしまうため 2 次方程式の形がかなり複雑な形になってしまう。対象が高校生なので分割線は $1 < x < \frac{5}{2}$ の間に限定して取り組ませた方がいいと感じた。

4.2.1.1 元気話．比例鉄砲

問．右の図のように x, y がともに正の整数となる格子すべてに柱を立てて，原点 O から鉄砲で球を撃ち出します。柱に当たらないように球を打ち出すにはどのような傾きをもつ直線にすればいいのでしょうか。ただし柱と球の幅はないものとし，直線の傾きは正の数とします。



数学の先生方には簡単すぎましたか？ 数学の問題として考えると，「比例 $y = ax$ において，グラフが x , y ともに整数の点を通らない正の数 a の値を一つ求めなさい。」という問題になります。内容は中学 1 年ですが，中学 1 年生にはできません。それは a の値が無理数だからです。でも一つだけ中学 1 年生でもあてはまる数を知っていますね。それは円周率 π です。比例定数が無理数になった場合には格子の点を通ることはありません。なんか不思議な感じがしませんか？

直線の角度を指定しても正解です。x 軸と 30°，または 60° 等の角度の直線です。この場合には 45° 以外はすべて正解です。($y = \tan\theta \cdot x$)

$y = \tan\theta \cdot x$ は $0° < \theta < 90°$ の範囲において $\theta = 45°$ 以外の値が柱にぶつかりません。なぜなら 45° 以外の角度の $\tan\theta$ の値はすべて無理数になるからです。度数法で表された $\tan\theta$ の値が有理数になるのは $\tan 45°$ だけです。$\tan\theta$ が有理数になる場合，例として $\tan\theta = 2$ になる θ は存在します。しかしこのような θ は有理数で表すことができません。このことから $\tan 45°$ は三角比の中では特別な存在だということを感じることができます。

[1] John Napier (1550-1617)

[2] Leonhard Euler (1707-1783)

4.2.2　二項分布と正規分布のグラフ (コイン編)　　(資料 P71 参照)

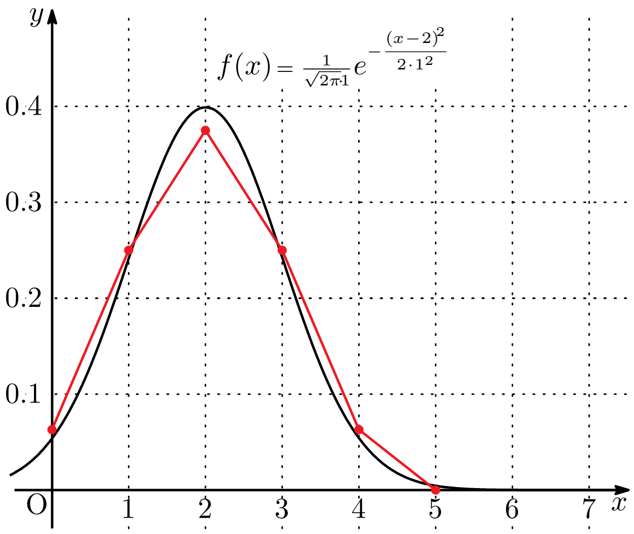
二項分布のグラフと正規分布のグラフがあまりにも天下りの感じがしたため生徒が取り組めるようにしました。

問．$B\left(4,\ \dfrac{1}{2}\right)$ の確率分布表を作ってみよう。

X	0	1	2	3	4	計
P	${}_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4$	${}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3$	${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$	${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1$	${}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0$	1
	$=\frac{1}{16}$	$=\frac{4}{16}$	$=\frac{6}{16}$	$=\frac{4}{16}$	$=\frac{1}{16}$	1
	$\fallingdotseq 0.063$	$\fallingdotseq 0.25$	$\fallingdotseq 0.375$	$\fallingdotseq 0.25$	$\fallingdotseq 0.063$	1.001

これを $E(X)=np,\ V(X)=npq$ を用いた正規分布 $N(2,\ 1^2)$ と比較させます。

問．$B\left(4,\ \dfrac{1}{2}\right)$ のグラフを作ってみよう。

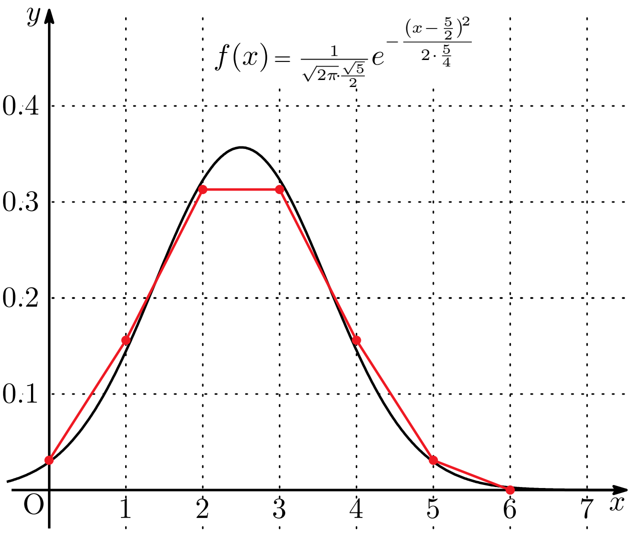


基本を学習した後，$B\left(5,\ \dfrac{1}{2}\right)$ と $B\left(6,\ \dfrac{1}{2}\right)$ のグラフに挑戦させます。

問．$B\left(5,\ \dfrac{1}{2}\right)$ の確率分布表を作ってみよう。

X	0	1	2	3	4	5	計
P	${}_5C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5$	${}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4$	${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3$	${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2$	${}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1$	${}_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0$	1
	$=\frac{1}{32}$	$=\frac{5}{32}$	$=\frac{10}{32}$	$=\frac{10}{32}$	$=\frac{5}{32}$	$=\frac{1}{32}$	1
	$\fallingdotseq 0.031$	$\fallingdotseq 0.156$	$\fallingdotseq 0.313$	$\fallingdotseq 0.313$	$\fallingdotseq 0.156$	$\fallingdotseq 0.031$	1

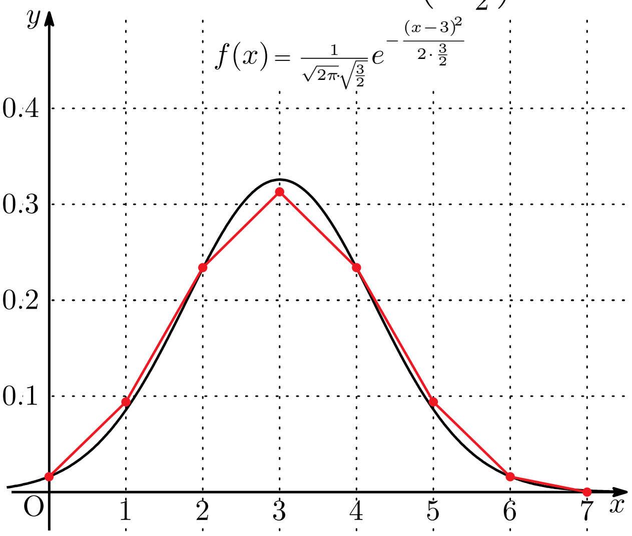
これを $E(X)=np,\ V(X)=npq$ を用いた正規分布 $N\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{4}\right)$ と比較させます。



問．$B\left(6,\ \dfrac{1}{2}\right)$ の確率分布表を作ってみよう。

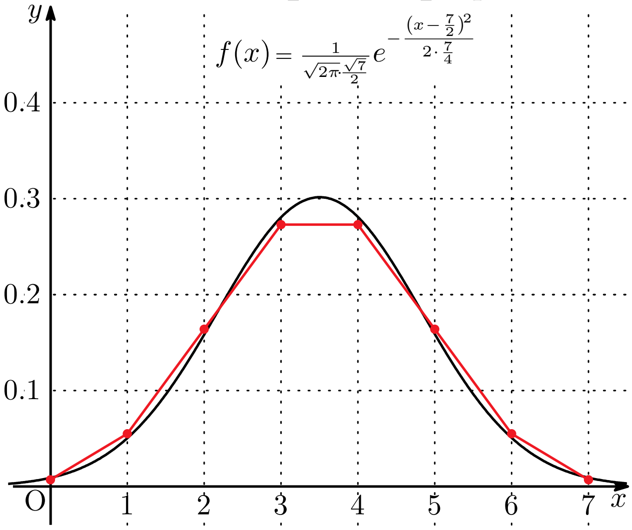
X	0	1	2	3	4	5	6	計
P	${}_6\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6$ $=\dfrac{1}{64}$ $\fallingdotseq 0.016$	${}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5$ $=\dfrac{6}{64}$ $\fallingdotseq 0.094$	${}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4$ $=\dfrac{15}{64}$ $\fallingdotseq 0.234$	${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3$ $=\dfrac{20}{64}$ $\fallingdotseq 0.313$	${}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2$ $=\dfrac{15}{64}$ $\fallingdotseq 0.234$	${}_6\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1$ $=\dfrac{6}{64}$ $\fallingdotseq 0.094$	${}_6\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^0$ $=\dfrac{1}{64}$ $\fallingdotseq 0.016$	1 1 1.001

これを $E(X)=np,\ V(X)=npq$ を用いた正規分布 $N\left(3,\ \dfrac{3}{2}\right)$ と比較させます。

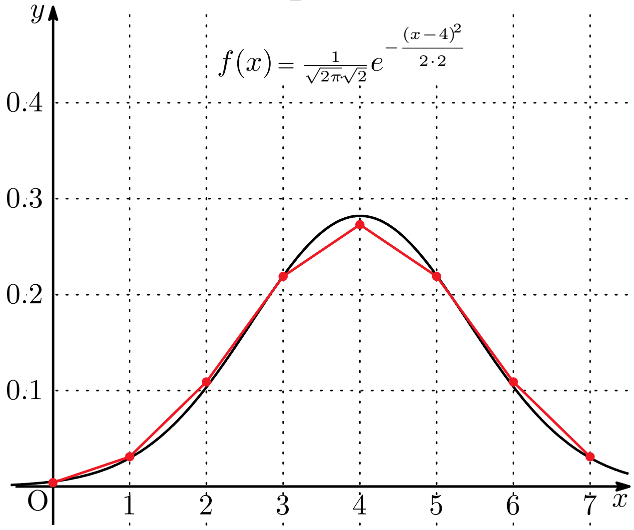


二項分布において n を十分に大きくしなければ正規分布における近似は成り立ちません。教師用資料に大きな n の 2 つのグラフを重ねたグラフがありました。ここでは生徒が自力で求めた二項分布の確立分布表をグラフにさせます。グラフ用紙には対応する正規分布のグラフが書かれており近似できるんだということを感じさせます。以下は生徒の実態に合わせて紹介という形で考察させればいいと思います。スタートを変更したい方もいると思うので解答を書いていない正規分布だけのグラフをあわせて加えておきます。

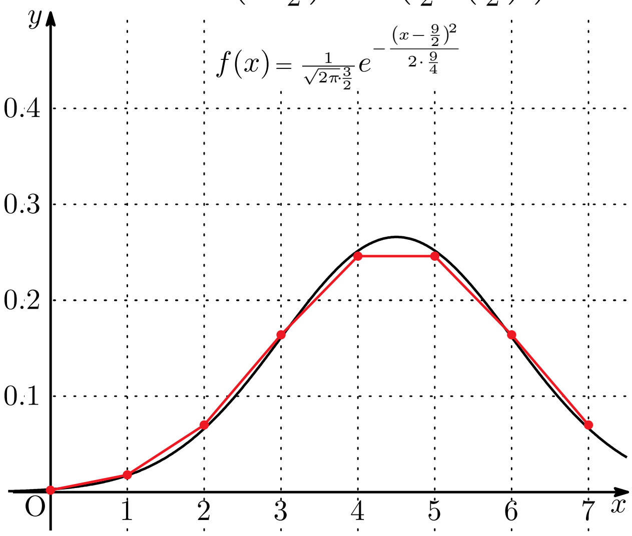
$B\left(7,\ \dfrac{1}{2}\right)$ と $N\left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{7}{4}\right)$



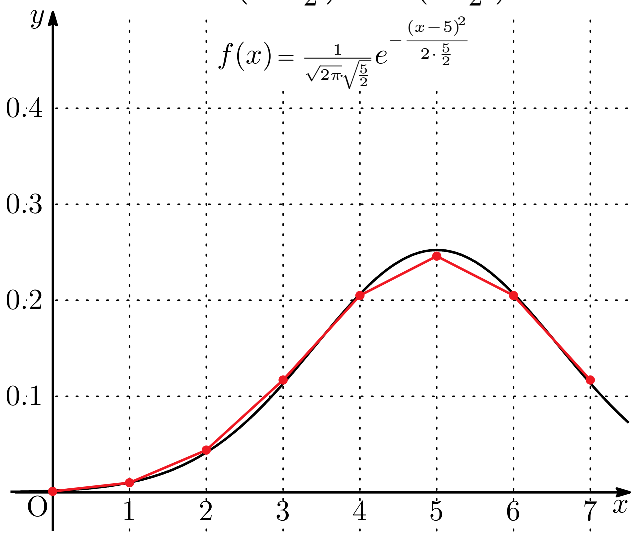
$B\left(8,\ \dfrac{1}{2}\right)$ と $N(4,\ 2)$



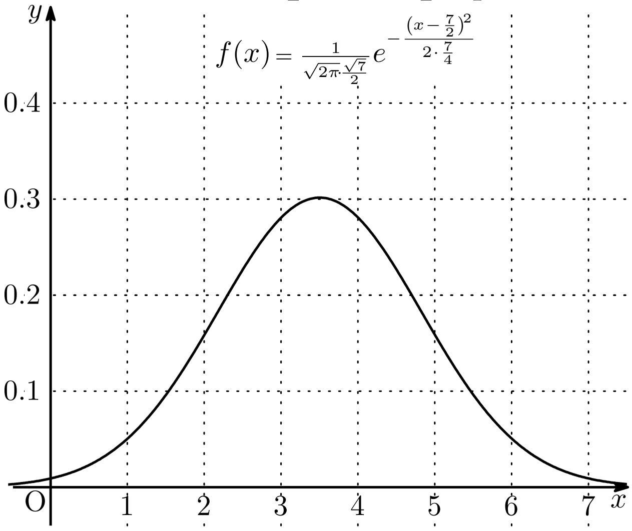
$B\left(9,\ \dfrac{1}{2}\right)$ と $N\left(\dfrac{9}{2},\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right)$



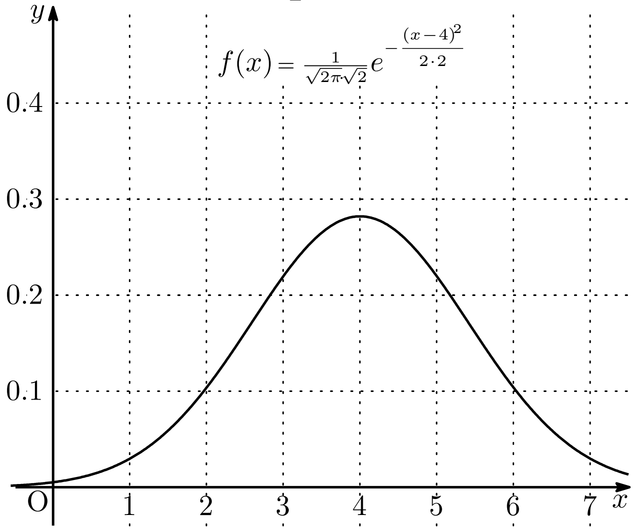
$B\left(10,\ \dfrac{1}{2}\right)$ と $N\left(5,\ \dfrac{5}{2}\right)$



$B\left(7,\ \dfrac{1}{2}\right)$ と $N\left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{7}{4}\right)$



$B\left(8,\ \dfrac{1}{2}\right)$ と $N(4,\ 2)$



4.2.3 二項分布と正規分布のグラフ (ダイス編) (本文 P73 参照)

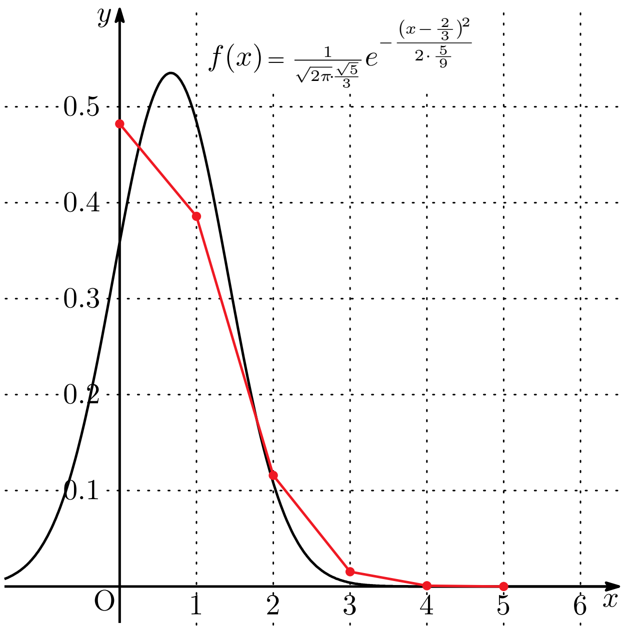
二項分布のグラフと正規分布のグラフがあまりにも天下りの感じがしたため生徒が取り組めるようにしました。コイン編とあわせてお読みください。

問. $B\left(4, \dfrac{1}{6}\right)$ の確率分布表を作ってみよう。

X	0	1	2	3	4	計
P	${}_4C_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4$	${}_4C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3$	${}_4C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$	${}_4C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1$	${}_4C_4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0$	1
	$=\dfrac{625}{1296}$	$=\dfrac{500}{1296}$	$=\dfrac{150}{1296}$	$=\dfrac{20}{1296}$	$=\dfrac{1}{1296}$	1
	$\fallingdotseq 0.482$	$\fallingdotseq 0.386$	$\fallingdotseq 0.116$	$\fallingdotseq 0.015$	$\fallingdotseq 0.001$	1

これを $E(X) = np$, $V(X) = npq$ を用いた正規分布 $N\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{9}\right)$ と比較させます。

問. $B\left(4, \dfrac{1}{6}\right)$ のグラフを作ってみよう。

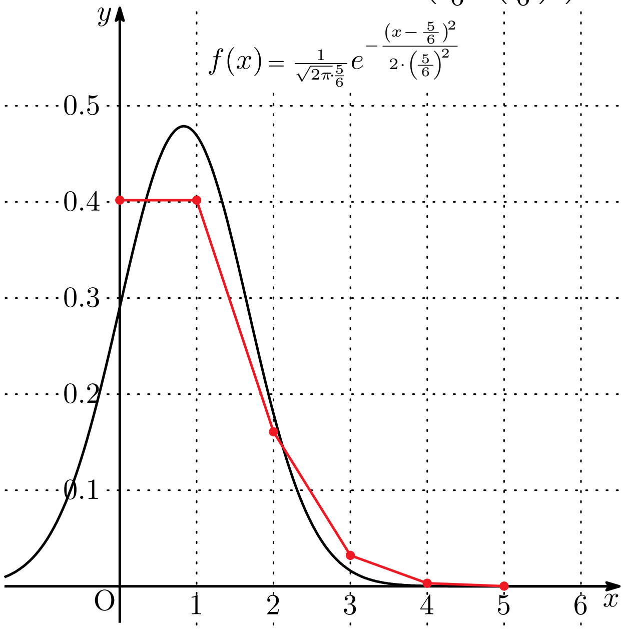


基本を学習した後，$B\left(5, \dfrac{1}{6}\right)$ と $B\left(6, \dfrac{1}{6}\right)$ のグラフに挑戦させます。

問. $B\left(5, \dfrac{1}{6}\right)$ の確率分布表を作ってみよう。

X	0	1	2	3	4	5	計
P	${}_5C_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^5$	${}_5C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^4$	${}_5C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3$	${}_5C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2$	${}_5C_4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^1$	${}_5C_5\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^0$	1
	$=\dfrac{3125}{7776}$	$=\dfrac{3125}{7776}$	$=\dfrac{1250}{7776}$	$=\dfrac{250}{7776}$	$=\dfrac{25}{7776}$	$=\dfrac{1}{7776}$	1
	$\fallingdotseq 0.402$	$\fallingdotseq 0.402$	$\fallingdotseq 0.161$	$\fallingdotseq 0.032$	$\fallingdotseq 0.003$	$\fallingdotseq 0.000$	1

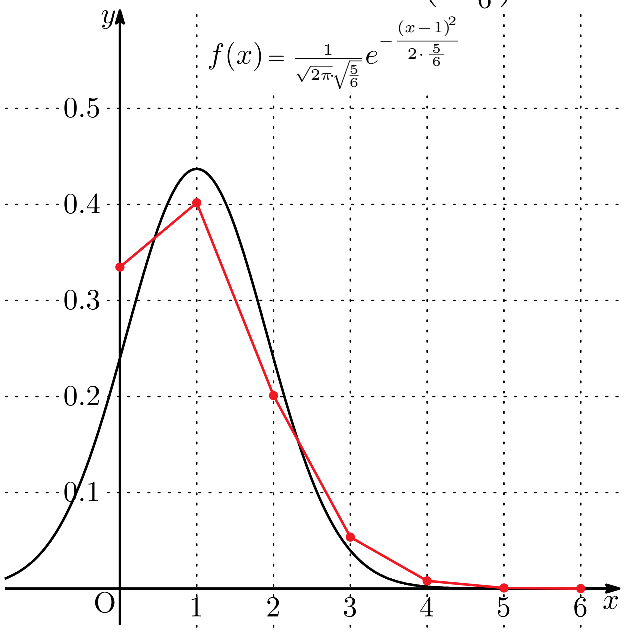
これを $E(X)=np,\ V(X)=npq$ を用いた正規分布 $N\left(\dfrac{5}{6},\ \left(\dfrac{5}{6}\right)^2\right)$ と比較させます。



問．$B\left(6,\ \dfrac{1}{6}\right)$ の確率分布表を作ってみよう。

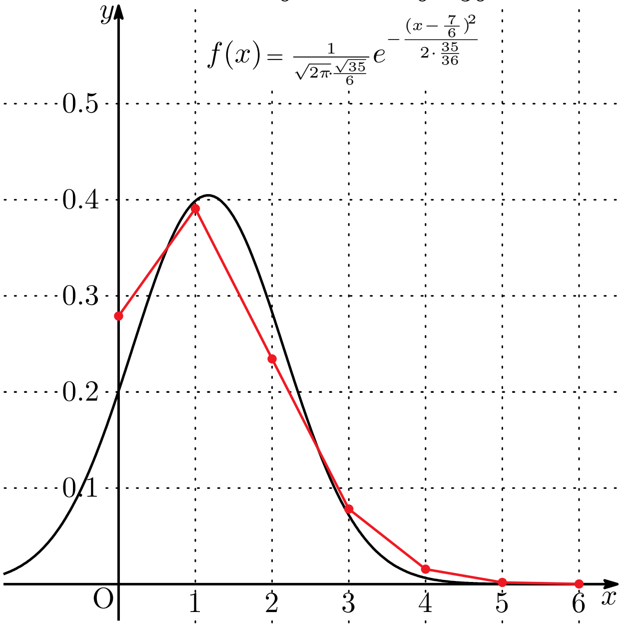
X	0	1	2	3	4	5	6	計
P	${}_6C_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6$	${}_6C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^5$	${}_6C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4$	${}_6C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3$	${}_6C_4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2$	${}_6C_5\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^1$	${}_6C_6\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^0$	1
	$=\dfrac{15625}{46656}$	$=\dfrac{18750}{46656}$	$=\dfrac{9375}{46656}$	$=\dfrac{2500}{46656}$	$=\dfrac{375}{46656}$	$=\dfrac{30}{46656}$	$=\dfrac{1}{46656}$	1
	$\fallingdotseq 0.335$	$\fallingdotseq 0.402$	$\fallingdotseq 0.201$	$\fallingdotseq 0.054$	$\fallingdotseq 0.008$	$\fallingdotseq 0.001$	$\fallingdotseq 0.000$	1.001

これを $E(X)=np,\ V(X)=npq$ を用いた正規分布 $N\left(1,\ \dfrac{5}{6}\right)$ と比較させます。

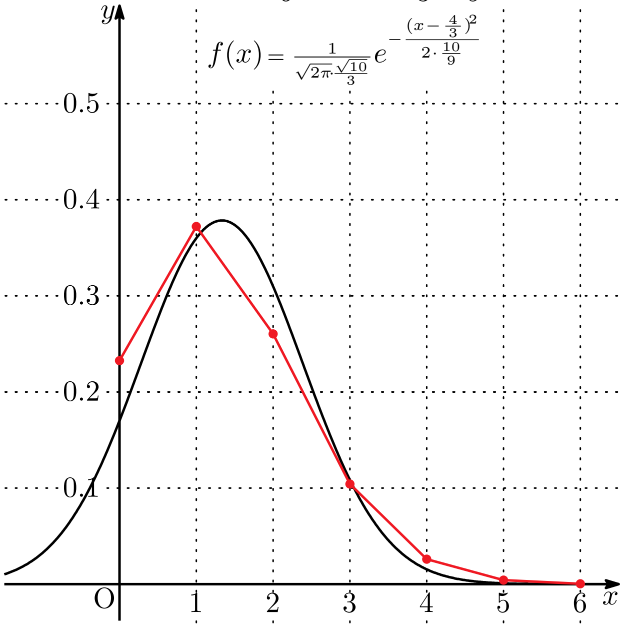


二項分布において n を十分に大きくしなければ正規分布における近似は成り立ちません。初期段階において自分で求めた値と比較した後，n を大きくした二項分布と正規分布を重ね合わせたグラフを見せた方が理解しやすいと思い作成しました。以下は生徒の実態に合わせて紹介という形で考察させればいいと思います。

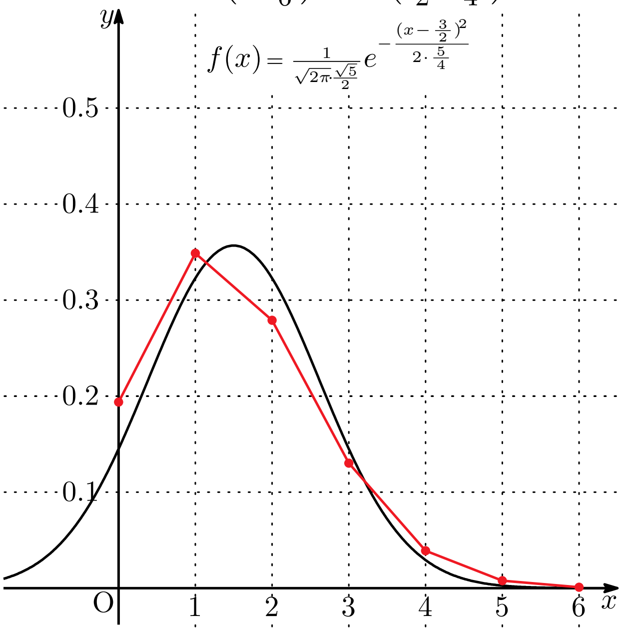
$B\left(7,\ \frac{1}{6}\right)$ と $N\left(\frac{7}{6},\ \frac{35}{36}\right)$



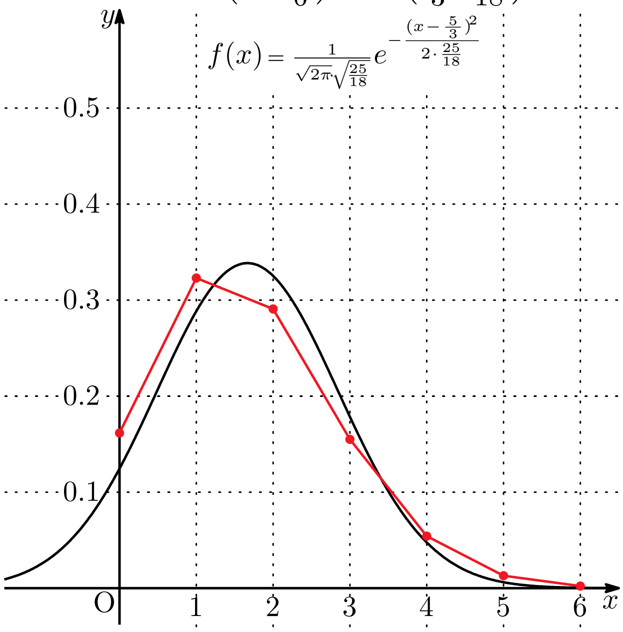
$B\left(8,\ \frac{1}{6}\right)$ と $N\left(\frac{4}{3},\ \frac{10}{9}\right)$



$B\left(9,\ \frac{1}{6}\right)$ と $N\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{4}\right)$



$B\left(10,\ \frac{1}{6}\right)$ と $N\left(\frac{5}{3},\ \frac{25}{18}\right)$



4.3　数学と社会生活

4.3.1　勝ち抜けの確率　〜麻雀 M トーナメント 2023 より〜

麻雀の年間リーグ戦のシーズンオフイベント M トーナメントが 2023 年 6 月から始まりました。4 人で半荘(チャン)2 回を戦いトータルポイントを争う個人戦で，上位 2 名が勝ち進んでいきます。その中継を観ているときに前半の半荘でトップを取ると，勝ち抜けの確率が 95%以上というコメントがあり，そんなに高いのか？ ちょっと調べてみました。麻雀は最初に 25000 点を持っている状態からスタートし，最後は 30000 点を基準にスコアを表し，それに順位点を加えて最終的なポイントとします。A, B, C, D の 4 人で戦った前半の半荘の仮想状態を以下のようにします。

順位	選手	スコア	ポイント	備考
1 位	A	35000 点	55 点	1 位の順位ポイント+50点を含む
2 位	B	30000 点	10 点	2 位の順位ポイント+10点を含む
3 位	C	20000 点	−20 点	3 位の順位ポイント−10点を含む
4 位	D	15000 点	−45 点	4 位の順位ポイント−30点を含む

この状態で後半の半荘を考察していきます。なお順位に対応するスコアは同じとします。

1 位	2 位	3 位	4 位	ABCD
A(110)	B(20)	C(−40)	D(−90)	○○×× ……①
		D(−65)	C(−65)	○○×× ……②
	C(−10)	B(−10)	D(−90)	○△△× ……③
		D(−65)	B(−35)	○×○× ……④
	D(−35)	B(−10)	C(−65)	○○×× ……⑤
		C(−40)	B(−35)	○△×△ ……⑥
B(65)	A(65)	C(−40)	D(−90)	○○×× ……⑦
		D(−65)	C(−65)	○○×× ……⑧
	C(−10)	A(35)	D(−90)	○○×× ……⑨
		D(−65)	A(10)	○○×× ……⑩
	D(−35)	A(35)	C(−65)	○○×× ……⑪
		C(−40)	A(10)	○○×× ……⑫
C(35)	A(65)	B(−10)	D(−90)	○×○× ……⑬
		D(−65)	B(−35)	○×○× ……⑭
	B(20)	A(35)	D(−90)	○×○× ……⑮
		D(−65)	A(10)	×○○× ……⑯
	D(−35)	A(35)	B(−35)	○×○× ……⑰
		B(−10)	A(10)	○×○× ……⑱
D(10)	A(65)	B(−10)	C(−65)	○××○ ……⑲
		C(−40)	B(−35)	○××○ ……⑳
	B(20)	A(35)	C(−65)	○○×× ……㉑
		C(−40)	A(10)	△○×△ ……㉒
	C(−10)	A(35)	B(−35)	○××○ ……㉓
		B(−10)	A(10)	○××○ ……㉔

( ) 内はポイントの合計です。△は順位点が同点のため実際の順位は素点の差で決着します。ここでは各プレイヤーに 0.5 を割り振りました。

選手	A	B	C	D	合計
○の数の合計	22.5	13	7.5	5	48
勝ち抜けできる確率	0.938	0.542	0.313	0.208	2.00

実際の勝負はどうだったかというと

場合	対戦	備考
①		
②		
③	予選 $_1$B 卓, 決勝 $_T$A 卓	予選 $_1$B 卓素点の差で B，決勝 $_T$A 卓素点の差で C が進出
④		
⑤		
⑥		
⑦	予選 $_2$A 卓	
⑧		
⑨	予選 $_1$G 卓, 予選 $_2$C 卓	
⑩	予選 $_1$D・H 卓	
⑪		
⑫	決勝 $_{SF}$A 卓	
⑬	予選 $_1$A 卓, 予選 $_2$B 卓	
⑭		
⑮	予選 $_1$E 卓	
⑯		
⑰	予選 $_1$J 卓, 決勝 $_{SF}$B 卓	
⑱	予選 $_1$K 卓, 決勝 $_T$B 卓	
⑲	予選 $_2$E 卓	
⑳	予選 $_1$C 卓	予選 $_1$C 卓の後半の半荘は AC 同点のため順位点を折半
㉑	予選 $_1$F, 予選 $_2$D 卓, 決勝 $_T$C 卓	予選 $_2$D, 決勝 $_T$C 卓順位点を上回る素点の差で A, D が進出
㉒	決勝 $_T$D 卓	順位点 AD 同点，素点の差で D が進出
㉓	予選 $_1$I・L 卓	
㉔	予選 $_2$F 卓	

一昔前までは強面のお兄さんが遊んでいる印象がある麻雀ですが，この頃ではゲームの普及もあり e スポーツを意識した e – mahjong として人気が出始めています。高齢者の間でも指先を動かすことで脳を活性化し，痴呆症を防止する役割もあるということで，各地で高齢者の麻雀教室もさかんに行われているようです。

M トーナメントも 7 月 30 日 SF(セミファイナルいわゆる準決勝) が終わり，後は優勝者を決める決勝戦を残すのみとなりました。結果前半の半荘でトップを取って次のステージに行くことができなかったのは㉒の決勝 $_T$D 卓の ABEMAS の白鳥選手のみでした。

選手	A	B	C	D	合計
勝ち抜けの合計数	23	9	8	8	48
勝ち抜けの確率	0.96	0.38	0.33	0.33	2.00

大きな目で眺めると確率どおりかなぁ〜。(どれくらいの大きな目かは知らないけど……。)

第5章　数学 III

5.1　極限

5.1.4　二項級数

高等学校の確率で組み合わせの記号Cを学ぶが，それを用いた数列には言及していない。わずかにパスカルの三角形の係数を表すために二項定理のところで出現するくらいである。放送大学のある講座で紹介された式に感動した。以下の問題はどうだろうか？

問．次の式を展開したとき x^4 と x^6 と x^8 の係数を求めなさい。

$$\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\frac{35}{128}x^8+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\frac{35}{128}x^8+\cdots\right)$$

上の式は3大数学者の一人ニュートンが発見した式なのだが，それぞれの係数はわかりましたか？

x^4 の係数は定数項と x^4 の項の積が2つ，x^2 と x^2 の項の積が1つより

$$1\cdot\frac{3}{8}\times 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$$

x^6 の係数は定数項と x^6 の項の積が2つ，x^2 と x^4 の項の積が2つより

$$1\cdot\frac{5}{16}\times 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}\times 2=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}=1$$

x^8 の係数は定数項と x^8 の項の積が2つ，x^2 と x^6 の項の積が2つ，x^4 と x^4 の項の積が1つより

$$1\cdot\frac{35}{128}\times 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{16}\times 2+\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{35}{64}+\frac{5}{16}+\frac{9}{64}=1$$

よって上の式を展開した形は $1+x^2+x^4+x^6+x^8+\cdots$ になり，初項1，公比 x^2 の無限等比数列の和になります。$|x|<1$ のとき $\dfrac{1}{1-x^2}$ に収束します。1につづく一般項 a_n は $a_n=\dfrac{{}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}}{2^{2n-1}}x^{2n}$ になります。具体的な係数の数列において，分母は簡単ですが分子は1, 3, 10, 35, 126, $\cdots$ となり，この数列がCを用いた ${}_1\mathrm{C}_0$, ${}_3\mathrm{C}_1$, ${}_5\mathrm{C}_2$, ${}_7\mathrm{C}_3$, ${}_9\mathrm{C}_4\cdots$ になります。階差数列を用いても求めることができない数列ですが，かなり単純な数列です。数列においてもCの威力がわかるんじゃないかなぁって思いました。

自分も含めてですが疑り深い性格の人は2個，3個成り立つからって全部とは限らないと思います。もう一つ x^{10} の係数も確認してみましょう。

x^{10} の係数は定数項と x^{10} の項の積が2つ，x^2 と x^8 の項の積が2つ，x^4 と x^6 の項の積が2つより

$$1\cdot\frac{126}{512}\times 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{35}{128}\times 2+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{16}\times 2=\frac{63}{128}+\frac{35}{128}+\frac{30}{128}=1$$

次は証明か……私は自信なし，誰か教えてくれないかなぁ〜。

5.1.5 累乗数 (perfect power)

累乗のことを英語で"power"といいます。そして整数の累乗形には"perfect power"という名前がついています。この累乗数の逆数和についての問題です。

問．次の式を証明しなさい。

$$\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{m^k}=1$$

数学 III の「数列の極限」を学習した後の問題としてどうだろうか。

$$\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{m^k}=\sum_{m=2}^{\infty}\Bigl(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{m^k}\Bigr)$$

( ) 内の数列は初項 $\dfrac{1}{m^2}$，公比 $\dfrac{1}{m}$ の無限等比数列なので

$$\begin{aligned}
&=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{m}}\\
&=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^2}\cdot\frac{m}{m-1}\\
&=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m(m-1)}\\
&=\sum_{m=2}^{\infty}\Bigl(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\Bigr)\\
&=\Bigl(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\Bigr)+\Bigl(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\Bigr)+\cdots\\
&=1
\end{aligned}$$

この数式の意味を具体的な数を用いて考えてみよう。

$$\begin{aligned}
\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{m^k}&=\sum_{m=2}^{\infty}\Bigl(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{m^k}\Bigr)\\
&=\sum_{m=2}^{\infty}\Bigl(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\cdots\Bigr)\\
&=\Bigl(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\Bigr)+\Bigl(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots\Bigr)+\cdots
\end{aligned}$$

1 を除く自然数の累乗数の逆数和であることがわかる。ただし複数の累乗形で表すことができる $\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{4^2}=\dfrac{1}{2^4}$ や $\dfrac{1}{64}=\dfrac{1}{8^2}=\dfrac{1}{4^3}=\dfrac{1}{2^6}$ 等はそれぞれ独立した数として複数回加えている。

このことを学習すると，例えば 4 や 9 等の 1 通りの累乗形でしか表すことのできない累乗数 (整数列大辞典：A093771) に比べて，16 や 64 等の複数の累乗形で表すことのできる累乗数 (整数列大辞典：A117453) は特別な存在であることがわかる。整数の累乗形は"perfect power"だが 16 や 64 等の複数の累乗形をもつ数には何か特別な名前 (例えば"super perfect power") を付けてもいいのではないだろうか。最後にこの特別な累乗数を書いておこう。数を見ただけで複数の累乗形を頭に思い描くことができるだろうか。

1, 16, 64, 81, 256, 512, 625, 729, 1024, 1296, 2401, 4096, 6561, $\cdots$ (整数列大辞典：A117453)

【追記】1 を除くことに違和感を感じて以下の数式を作ってみた。

$$1+\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{m^k}=2$$

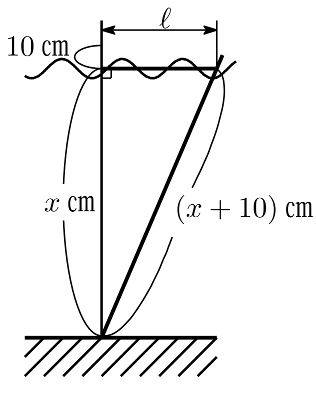
5.1.5.1　西暦 2025 年

2 変数のシグマで表す問題は少ないので今年が西暦 2025 年から以下のような式を紹介しながら取り組ませるのもいいと感じた。

> 問．次の式が成り立つことを示しなさい。
> $$\sum_{m=1}^{9}\sum_{k=1}^{9} mk = 2025$$

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{9}\sum_{k=1}^{9} mk &= \sum_{m=1}^{9} m \sum_{k=1}^{9} k \\
&= \sum_{m=1}^{9} m \cdot \frac{9\cdot(9+1)}{2} \\
&= \sum_{m=1}^{9} m \cdot 45 \\
&= 45 \sum_{m=1}^{9} m \\
&= 45 \cdot \frac{9\cdot(9+1)}{2} \\
&= 45 \cdot 45 \\
&= 2025
\end{aligned}$$

5.1.5.2　元気話．池の深さは？



潜らなくても池の深さがわかる。そんなバカな！ 三平方の定理，これを使うとたちどころにわかってしまうのである。右図において池の底から出ている茎の水面上 10 ㎝の所を持って，斜めに動かしていきます。池の水面まで ℓ ㎝のところで水に浸かったとしましょう。さあ池の深さは？

さっそく，解いてみましょう。池の深さを x ㎝とすると，

$$\begin{aligned}
(x+10)^2 &= x^2 + \ell^2 \\
x^2 + 20x + 100 &= x^2 + \ell^2 \\
20x + 100 &= \ell^2 \\
x &= \frac{\ell^2}{20} - 5
\end{aligned}$$

となります。$\ell = 50$ ㎝のときは $50^2 \div 20 - 5 = 120$ ㎝となります。

自分の家の近くに蓮花寺(れんげじ)池という蓮(はす)の葉が生えている池があります。家族で出かけてこどもが

「池の深さってどれくらい？」

「ちょっと待っててね。」

と言って上記の方法でやってみました。自信満々で

「だいたい 70 ㎝だよ。」

と言いました。しかし家族全員誰も信じてくれませんでした。少し悲しかったです。小学生相手に三平方の定理を教えるわけにもいきません。でも高等教育を受けているはずの家内も信じてくれませんでした。よけいに悲しくなりました。

5.3 積分法とその応用

5.3.2 忘れられない問題 ～入試問題より～

長く生きていると忘れられない問題に出会います。私にとって忘れようと思っても忘れることのできない問題集です。

5.3.2.1 3回出会った問題

問. $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\cos x+\sin x}\,dx$，$J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\cos x+\sin x}\,dx$ とします。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) $x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおいて置換積分法を用いることで，$I=J$ を示しなさい。

(2) $I+J$ の値を求めなさい。

(3) I と J の値を求めなさい。

この問題は2014年静岡大学の理学部・工学部の入学試験において出題された問題です。しかし私が高校3年生の時，受験勉強していたときに出会った問題とほぼ同じだったのです。どうして印象に残っているのかというと，単独では求めることが困難な定積分を互いに組み合わせることで求めることができることにビックリした記憶があります。さらに定期テスト前の勉強を学校でしていたとき，友人が「今度のテストに出そうな問題ある？」と聞いてきたので「あるよ！」とこの問題を言ったところ，そっくりそのまま定期テストに出題されたことでまた印象に残りました。さらに時代が進んだ2014年静岡新聞に掲載されたこの問題をみてまたビックリです。3回も出会ったこととそのことを覚えていることに何か運命を感じました。模範解答とグラフを載せておきます。

(1) $x=\dfrac{\pi}{2}-t$ より $\dfrac{dx}{dt}=-1$

x	$0\to\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}\to 0$

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}(-dt)$$

$\sin(\theta+\frac{\pi}{2})=\cos\theta, \cos(\theta+\frac{\pi}{2})=-\sin\theta$ より

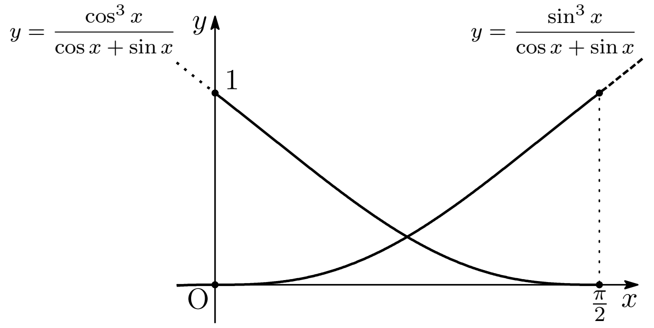
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin^3(-t)}{-\sin(-t)+\cos(-t)}\,dt$$

$\sin(-\theta)=-\sin\theta, \cos(-\theta)=\cos\theta$ より

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 t}{\sin t+\cos t}\,dt=J$$

(2)
$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\cos x+\sin x}\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\cos x+\sin x}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\cos x+\sin x}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x+\sin x)(\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x)}{\cos x+\sin x}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin x\cos x)\,dx$$
$$=\left[x-\frac{\sin^2 x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-1}{2}$$

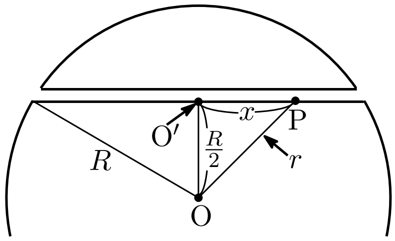
(3) $I=J$ より $I=J=\dfrac{\pi-1}{4}$



5.3.2.2　都市間貫通トンネル　〜未来の世界を感じさせてくれた問題〜

数学と物理は切っても切り離せない関係にあります。この問題も私が受験勉強のときに出会った問題です。都市と都市を地下トンネルで結ぶとエネルギーのいらない単振動をする列車ができるという問題です。実現は不可能かもしれないけど，未知なる未来社会を垣間見たような気がしました。正確な問題は忘れましたが，ネットで似たような問題をみつけました。2013 年京都大学の入試問題からの抜粋です。

問. 以下の設問では，地球は半径 R の球であり，密度は一様に分布していると考えてよい。また，地球の質量を M，万有引力定数を G とし，地球の自転の影響，摩擦，および空気の抵抗は無いものとする。
図のように，地球の中心 O から $\dfrac{R}{2}$ だけ離れたところを通る直線状の細いトンネルを掘った。中心 O からの距離が r で，トンネルの中心 O′ から x だけ離れたトンネル内の P 点にある質量 m の質点に働く重力の大きさは $\boxed{①}$ なので，その質点に働くトンネルに沿った方向の力の大きさは，m, M, R, x, G を使って $\boxed{②}$ で与えられる。したがって，地表で静止した状態からトンネルを通って反対側の地表に出るまでにかかる時間は $\boxed{③}$ である。



① $\dfrac{GMm}{R^3}r$　　② $\dfrac{GMmx}{R^3}$　　③ $\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}}$

現在予定されているプロジェクトに，軌道エレベータがあります。呼称は"宇宙エレベータ"になりそうです。これは重力と遠心力が釣り合っている場所，気象観測の静止衛星がある地域帯から地球の表面と宇宙の方面に同じ工事，または宇宙側には同じ重量の重さで釣り合いを保ちながら工事をして地球の表面方向に空中駅を造り，宇宙に行く時間と燃料を節約しようというプロジェクトです。航空機で空中駅まで行き，その後はエレベータで静止衛星軌道上まで行くという宇宙旅行です。エレベータの動力は単振動の原理からわずかなエネルギーで動きます。当初は 2018 年完成予定で立ち上がったプロジェクトでしたが，費用の捻出や材料の調達の問題から現在では 2031 年完成を目指して進められているようです。真空チューブが必要なのですが現在のカーボンナノチューブの技術で建設可能だそうです。一度完成してしまえば，高度の関係から姿勢制御だけのエネルギーで気象の影響を受けることなく半永久的に使用可能ということです。ただその材料を宇宙に運ばなくてはいけないのが大変ですが，現在ではロケットを使って運ぶのではなく，野球のピッチャーみたいな遠心力を使ったマシンで材料は宇宙まで運べるようです。投げ上げた材料を捕球するキャッチャーをどうやって造るのかは知りませんが……。とにかく技術的には建設可能ということです。2045 年には AI が意志を持ってしまうのではないかと思われる技術的特異点，通称シンギュラリティ (Singularity) が発生するのではと予言されていますが，これよりも現実的に宇宙エレベータはできそうです。まぁ私は年齢の関係で自分の目で見ることはできないかもしれませんが，人類の科学技術の発展には注目していきたいと思っています。

第6章　数学C

6.3　複素数平面

6.3.3　内分・外分そしてアポロニウスの円

「元気が出る数学の授業」の P100 にある「元気話．外分と複素数」を加筆しました。

複素数平面では中学 1 年の負の数，中学 3 年の無理数以来，久しぶりに数の世界が広がります。既習の実数と対比させる意味で次のような問題を考えてみました。与えられた実数を比を用いて 2 つの数に分ける考察で，内分・外分の利用です。内分・外分はアポロニウス[1]の円 (次頁参照) に発展できます。

問．6 を 2 : 1 の比に分ける数はいくつなんだろう？

※内分点 ($p<6$ のとき)

$$\begin{aligned} \mathrm{OP}:\mathrm{PA}&=2:1\\ 2\mathrm{PA}&=\mathrm{OP}\\ 2(6-p)&=p\\ 3p&=12\\ p&=4 \end{aligned}$$

※外分点 ($p>6$ のとき)

$$\begin{aligned} \mathrm{OP}:\mathrm{AP}&=2:1\\ 2\mathrm{PA}&=\mathrm{OP}\\ 2(p-6)&=p\\ p&=12 \end{aligned}$$

※軌跡 (数学 II)

$$\begin{aligned} \mathrm{OP}:\mathrm{AP}&=2:1\\ 2\mathrm{AP}&=\mathrm{OP}\\ 4\mathrm{AP}^2&=\mathrm{OP}^2 \end{aligned}$$

$\mathrm{P}(x,y)$, $\mathrm{A}(6,0)$ とすると

$$\begin{aligned} 4\left\{(x-6)^2+y^2\right\}&=x^2+y^2\\ 4x^2-48x+144+4y^2&=x^2+y^2\\ x^2-16x+48+y^2&=0\\ (x-8)^2+y^2&=16 \end{aligned}$$

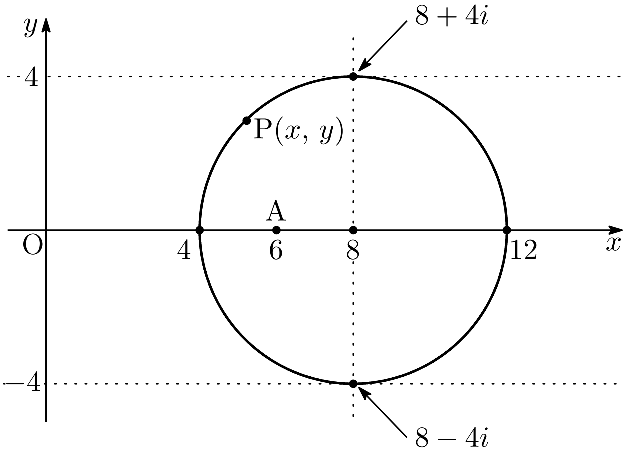
※複素数平面

$$\begin{aligned} \mathrm{OP}:\mathrm{AP}&=2:1\\ |x+yi|:|(x-6)+yi|&=2:1\\ 2|(x-6)+yi|&=|x+yi|\\ 4|(x-6)+yi|^2&=|x+yi|^2\\ 4\left\{(x-6)^2+y^2\right\}&=x^2+y^2\\ 4x^2-48x+144+4y^2&=x^2+y^2\\ x^2-16x+48+y^2&=0\\ (x-8)^2+y^2&=16\\ |z-8|&=4 \end{aligned}$$

これは中心 (8, 0)，半径 4 の円を表している。

数直線上の数 (実数) しか知らない生徒は 2 つの数 4 と 12 しかみつけることができないが，平面の世界 (複素数平面) に数が広がると $8\pm4i$ や $5\pm\sqrt{7}\,i$ 等の複素数が含まれることを知り，条件を満たす数が無限にあることを感じることができます。他の解法として数学 II で学習した軌跡を用いた解法を載せましたが，軌跡やベクトルでは数として認識できません。広がった数の世界と今までの数の世界との橋渡しの問題となればなぁと感じました。授業目的に応じてどこまで指導するかは任せます。生徒が自力で新しい数を発見できたらほめてあげてくださいね。アポロニウスの円は線分を分ける図形として発見されました。複素数平面の発見とは時代が異なることもあわせて伝えるといいと思います。

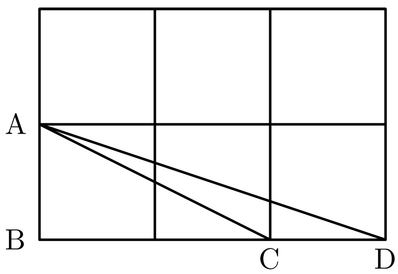
[1] Apollonius of Perga (BC 262 年頃-BC 190 年頃)



6.3.3.1　元気話．45 年前の高校入試問題

問．　右の図のように, 大きさの等しい 6 個の正方形を並べ，4 点 A, B, C, D をきめて，AC, AD を結んだ。

　このとき，∠ACB と ∠ADB の和が 45° になることを証明せよ。



解き方はたくさんあります。点 B を原点として直線を引き直して，三平方の定理を組み合わせてもできます。

対称形から

$\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{EAF}$

$\angle \mathrm{ADB} = \angle \mathrm{DAF}$

図より $\mathrm{EA} = \mathrm{ED}$

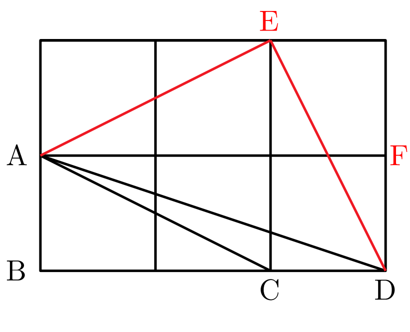
$\angle \mathrm{EAD} = \angle \mathrm{EDA}$(二等辺三角形の底角)

また $\angle \mathrm{AED} = 90^\circ$ より

$\angle \mathrm{EAD} + \angle \mathrm{EDA} = 90^\circ$

よって $\angle \mathrm{EAD} = 45^\circ$

$\angle \mathrm{ACB} + \angle \mathrm{ADB} = 45^\circ$



テストの解答としての証明はもう少し丁寧に書かないと減点されるかもしれません。$\angle \mathrm{E} = 90^\circ$ も説明が必要かな？ 実はこの問題は自分が中学生のときの高校入試の証明問題です。当時は社会と抱き合わせで 60 分の試験時間でした。この証明を考えてたら 30 分経っていたことに気がついてあわてて数学の他の問題と社会をやった覚えがあります。結果，できなかったことだけが強く心に残りました。45 年ぶりに (年齢がばれますね。) 当時の新聞がある図書館をみつけ，問題をコピーして考えました。色々な方法でできたんだけど，上の方法が一番わかりやすいかなぁ〜と感じました。正方形 6 個がヒントだったんですね。これでようやく心の中で占有していたこの問題を忘れることができそうです。でもさ，よく忘れないでいたもんだと自分で感心しました。一つだけ確かなことが，今の自分は中学の自分よりは賢くなっていました。

第7章　元気話

7.6　数と現代史

7.6.8　数と現代史その2

前回の「数と現代史」では凶数666を中心に描きました。今回は救いの数153を重点において書いてみたいと思います。復習で新約聖書の153の部分を書き出してみます。

> 「シモン・ペトロが舟に乗り込んで網を陸に引き上げると，百五十三匹もの大きな魚でいっぱいであった。それほど多くとれたのに，網は破れていなかった。」 (新約聖書 新共同訳：ヨハネによる福音書21章11節)

十字架上で亡くなったイエスが復活して弟子のところに現れたときの話です。153は三角数といい自然数を順に加えてできる数で1から17までの和です。また153は数の並びを変えずに $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$ と表せる特別な三角数です。

7.6.8.1　ファティマの聖母

153で真っ先に思い出すのは1917年5月13日にポルトガルのファティマに出現した聖母です。初めて出現した日が5月13日で，MMDDの513を並び替えると153になるからです。概要[1]を書いておきます。

回	月　日	特記事項
①	5月13日(日)	・3人の牧童に初出現，毎月13日のお願い (1917年)
②	6月13日(水)	・聖母の胸の外にある茨に囲まれた心臓
③	7月13日(金)	・第一，第二，第三の預言が与えられた
④	8月13日(月)	・行政責任者が3人を監禁したため3人の牧童は現場に行けなかった
⑤	8月19日(日)	・会えなかった13日のかわりに予告なく出現
⑥	9月13日(木)	
⑦	10月13日(土)	・七万人の大群衆が目撃した「太陽の奇跡」

奇跡の初日から最終日までの日数が153日後であることからも聖母は513が153と等しいことを伝えています。

18(5月)+30(6月)+31(7月)+31(8月)+30(9月)+13(10月)= 153

ここでは細かな内容には踏み込まずに表面上の数で話を進めていきます。一つ大切なことは七万人の大群衆が目撃した「太陽の奇跡」があった最終日の10月13日は，最初に出現した5月基準のMMDDが666になることです。

531 + 30(6月)+31(7月)+31(8月)+30(9月)+13(10月)= 666

このことから聖母の出現は「救い」(153)と「艱難」(666)の両方を含んでいることになります。5月13日の513は153にもなるが666にもなるということです。$666 = 513 + 153$ または $513 = 666 - 153$，表裏一体ということですね。

[1]参考文献 「第3の予言」 ダニエル・レジュ著 たま出版 1990年

7.6.8.2　秋田の聖母

日本ではあまり有名ではありませんが，海外ではそれなりに評価を受けている日本における聖母の出現[2]をご存じですか？　ファティマの聖母が出現した 1917 年を 1 年目と数えると，57 年後の 1973 年 7 月 6 日に秋田にあるカトリックの「聖体奉仕会」のシスター笹川カツ子さん (1931 年 5 月 28 日生, 当時 42 歳) に 3 回聖母が出現しました。

回	月　日	特記事項
①	7月 6日(金)	・秋田初出現 (1973 年)
②	8月 3日(金)	
③	10月13日(土)	・秋田最後


[3]

秋田の聖母の出現は初出現の日を 1 日目と数えたとき，ちょうど 100 日目の 10 月 13 日が最後の出現でした。またシスター笹川さんの所属している「聖体奉仕会」には,「すべての民の御母」と呼ばれる聖母の御絵をもとに 1963 年に若狭三郎さんによって製作された木像の聖母マリア像があり，聖母が出現した後，このマリア像が 101 回の涙を流したことでも知られています。

7.6.8.3　秋田の聖母像 101 回の涙の奇跡

聖母の最後の出現からちょうど 64 週後の同じ土曜日，涙の奇跡が始まりました。涙の奇跡は 7 年の間に 101 回とかなり多いのでとてもここで全てを考察することはできません。特記事項がある回のみ書き出してみました。

回	年　月　日	時刻	特記事項	通算回数
1	1975年 1月 4日(土)	9:30	・涙，初日	11
3		18:45	・おびただしく流れる涙	13
22	1978年12月25日(月)	2:15	・TV東京によって涙を流す像が撮影された	32
26	1979年 3月25日(日)	9:20	・涙，聖母像の台をひたす	36
90	1979年 7月27日(金)	17:25	・おびただしく流れる涙	100
101	1981年 9月15日(火)	14:00	・涙，最終日	111


[4]

101 回の涙の奇跡の中で 3 回目, 26 回目, 90 回目の 3 回，際だって多量の涙が流れました。この数にファティマと秋田の聖母出現の回数 10 を加えると，$13, 36, 100$ になります。このことからファティマと秋田の聖母を同じ聖母の継続した出現として考えなさいというメッセージを受け取りました。13 は最後の晩餐の人数で，36 はキリスト教では聖数，100 は完成，完全を表す 10 の平方です。聖母はこの 3 回は特別ということで，出現した月日の MMDD に特徴を残してくれました。

$$104 + 325 + 727 = 1156 = 34^2$$

13 と 36 と 100 の特徴もあわせて紹介しておきます。

$$13 = 3^2 + 3 + 1$$
$$36 = 6^2 = (1+2+3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$$
$$100 = 10^2 = (1+2+3+4)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$$

[2]参考文献 「聖母マリア像の涙」 安田貞治著 エンデルレ書店 2000年
[1]画像引用先:Wikipedia「秋田の聖母マリア」
[2]画像引用先:YOU TUBE TV東京撮影動画

ファティマと秋田を結びつけていい理由の一つに, 当時まだ日本に伝えられていなかった「ファティマの祈り」を聖母がシスター笹川さんに教えたという事実もあります。153 から自分が真っ先に思いついた聖母の奇跡はファティマと秋田を加えて，出現が 10 回，涙が 101 回の合計 111 回あったということになります。

$$111 = 10^2 + 10 + 1$$

7.6.8.4 聖母の出現に共通する 10 月 13 日

2 つの聖母出現を考えるときまず真っ先に気がつくのが，出現年の平均が第 2 次世界大戦が終わった 1945 年になることです。

$$(1917 + 1973) \div 2 = 1945$$

ようするに 2 つの聖母出現は (1945 ± 28) 年で表せます。28 は 2 番目の完全数です。そして 2 つの聖母出現に共通する唯一の日があります。10 月 13 日 (土) です。この日は 5 月基準の MMDD が凶数 666 になると書きましたが，2 つある 1013 が 2026 年の艱難を示しているのではと感じました。キリスト教では人類が最後の艱難に出会ったとき，天からキリストが再臨し，人類を救うとあります。この再臨する最後の艱難の年が 2026 年なのではと感じました。

平成が令和になったとき，ちょうど平成 31 年が令和元年になり，元号が変わっても 30 を加えれば平成だと何年なのかすぐわかるように，西暦においても 2026 年にキリストが再臨したとして，西暦が SC(Second Coming) になったとしても，$2025 = 45^2$ を加えれば西暦何年かがわかるように神さまが設定したかもと考えることができます。なぜこのことが凶数 666 なのか, おめでたいことじゃないのか。そうではありません。これ以降キリストによって人類が支配されるからです。人類の自由な生活がなくなるからです。

終末論的な話になりましたが，ネガティブに考える必要はありません。若い人はご存じないかもしれませんが，1999 年のノストラダムスの恐怖の大王から派生した終末論がそうだったように，基本何も起こらないと考えていい。しかし心の片隅に少しだけ準備しておけばいいと思います。ここで言いたいのはもしキリストの再臨があるとすると 2026 年かもしれないということです。もう一度言います。もしあるとするとですよ。

7.6.8.5 キリスト教とは？

キリスト教はイエス・キリストを主として認め, 贖い, 仕える宗教です。人類の最後の艱難時に人類を救うため再臨すると書きましたが, しかし艱難の前には救出するとも書かれています。[5]

> 「心を騒がせるな。神を信じなさい。そして，わたしをも信じなさい。わたしの父の家には住む所がたくさんある。もしなければ，あなたがたのために場所を用意しに行くと言ったであろうか。行ってあなたがたのために場所を用意したら，戻って来て，あなたがたをわたしのもとに迎える。こうして，わたしのいる所に，あなたがたもいることになる。」
> (新約聖書 新共同訳：ヨハネによる福音書 14 章 1-3 節)

ここで注意しておきたいことはこの文を読んでいるあなたがキリスト教徒である必要はありません。なぜなら……

> 「預言者ダニエルの言った憎むべき破壊者が，聖なる場所に立つのを見たら——読者は悟れ——，そのとき，ユダヤにいる人々は山に逃げなさい。」 (新約聖書 新共同訳：マタイによる福音書 24 章 15, 16 節)

[5] 日本聖書協会「新約聖書 新共同訳」

ここで読者と呼びかけています。義人としての救出対象は聖書を読んでいる人に向けられています。もちろんキリスト教徒をも含んでいるのでしょう。別に現在の生活を変える必要はありません。もし未来が不安でもまだまだ起こらなければならないことがたくさん聖書に記述されています。

> 「エルサレムが軍隊に囲まれるのを見たら，その滅亡が近づいたことを悟りなさい。そのとき，ユダヤにいる人々は山に逃げなさい。都の中にいる人々は，そこから立ち退きなさい。田舎にいる人々は都に入ってはならない。」　(新約聖書 新共同訳：ルカによる福音書 21 章 20, 21 節)

> 「あなたがたはこれらの物に見とれているが，一つの石も崩されずに他の石の上に残ることのない日が来る。」
> (新約聖書 新共同訳：ルカによる福音書 21 章 6 節)

上のルカによる福音書 21 章 6 節の文はエルサレムに起こる地震を予言した文だといわれています。一人一人の生き方の違いで神さまは人類を選抜するはずです。もし自分がその資格がなくても資格を持っている人を探してその人と契約すればいいことです。"あなたに声がかかったら，自分も行きたいので知らせて欲しい。"と。義人の救出は人数制限がないことをヨハネによる福音書 14 章 1 節の"住む所"という表現で伝えています。

艱難前に「艱難から逃げろ！」と言うキリスト，艱難にあっている人類を救うキリスト。どちらもキリストです。キリスト教は艱難前の携挙または艱難後にキリストの再臨を望むか 2 者択一の宗教です。

7.6.8.6　さいごに

この記事を書くために復習をかねて Wikipedia を調べていたところ，「秋田の聖母マリア」の頁に 2019 年 10 月 6 日 (日) にシスター笹川さんの元に聖母が出現したとあった。

ヨハネの黙示録の最後の文が 22 章 21 節で並べて書くと 2221，2019 年に出現？ どちらも連続整数を降順に書いた数になって，22, 21, 20, 19, $\cdots$ とカウントダウンになっている。Xday は近いということかな……。最後にひらがなで表すと句読点を含め 100 文字 (英文は完全数 28 単語) だった「ファティマの祈り」を載せておく。

> ファティマの祈り
>
> 主(しゅ)イエス・キリスト，わたしたちの罪(つみ)をおゆるしください。
> わたしたちを滅(ほろ)びから救(すく)い，すべての人々(ひとびと)，ことに御憐(おあわ)れみをもっとも必要(ひつよう)としている人々(ひとびと)を天国(てんごく)に導(みちび)いてください。
> アーメン。

7.6.8.7　超短編近未来小説 X 月 Y 日

X 月 Y 日 TV からヒステリックな声がする。

> 「こちらエルサレム在住特派員です。ただいまエルサレム上空にたくさんの UFO が出現しました。政府は軍隊に出動要請を出した模様です。もういちど繰り返します。これはフィクションではありません。ただいまエルサレムの上空に多くの UFO が出現しました。イスラエル政府は軍隊へ出動要請を出した模様です。」

7.10　四色定理

「四色定理」は数学を志した人ならだれもが知っている定理ですよね…。簡単に説明すると平面上の地図はどんな地図でも 4 色で色分けできるというシンプルな定理です。1975 年にコンピュータを使った場合分け手法で証明されたので私は「四色問題」の方がしっくりきますが…。今でもコンピュータに頼らない証明は何かないだろうかと研究されているようです。話が長くなりましたが，これが面白かったです。自分達の住んでいる都道府県の色塗りをさせたのですが，子どもたちは夢中になってやり，私もかなり間違えました。で，授業で行うための一言を…。

(1) まずは地図を入手しなければなりません。これは”白地図” で検索すれば無料で手に入るサイトがみつかります。無料といっても著作権を手放したわけではありません。ただ授業で使用する場合には増し刷りしてもいいということです。

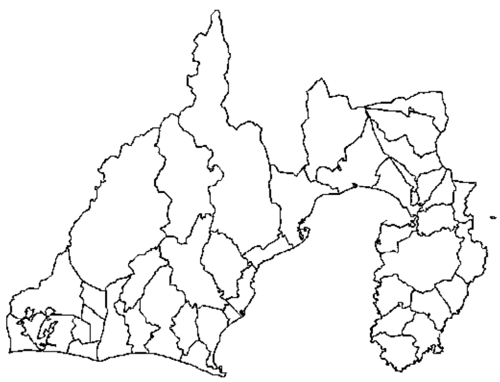
(2) 次は模範解答づくりです。以下のサイトで手に入れた白地図をアップロードすれば自動でやってくれます。ただ白地図の線が細いと認識できないときがあります。画像ソフトで灰色がかった色を黒に変換すればできると思います。

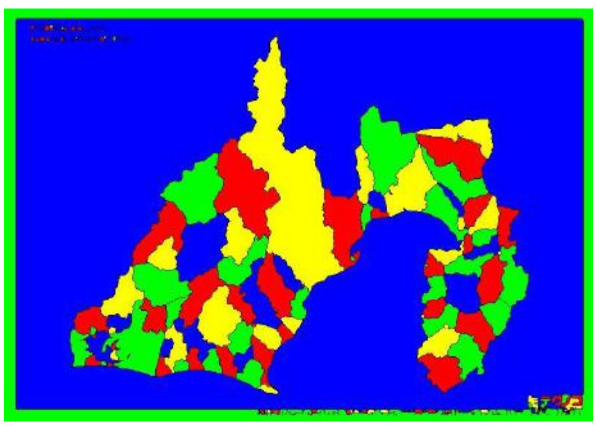
    自動色塗りサイト：`https://n.freemap.jp/st/list.html`

上記のサイトで地図の色塗りができます。まず最初に自分達の住んでいる都道府県を選んで 4 色で色塗りできるか挑戦してみましょう。

これは意外と簡単にできると思います。なぜかというと選んだ都道府県の回りを色と認識していないからです。都道府県の外側も 1 つの地域と考える事によって，選んだ都道府県の内部は基本 3 色で色を塗らなければいけないからです。外側の地域と重ならなければ白色があったもかまいません。ある程度の生徒ができたと感じたら，上記のことを説明することによってようやく四色定理がいかに難しいかわかると思います。

できたら印刷させて教師の所に持ってくるように指示します。たぶん大半が 4 色で塗れていない，重なっているところがあると思います。指摘して再度がんばるように声をかけてください。できた生徒の作品は黒板に磁石で貼り付けてあげましょう。その生徒はもうみんなの先生です。できない友人の所に行って助けてあげなさいって言ってください。以下の図は私の住んでいる静岡県です。もし御自分の地域が意外と簡単なときにはまぁまぁの難易度ですのでおすすめです。





7.11　本の出版に関して

「元気が出る数学の授業　～高校数学教材集～」はすべて LaTeX で作成しました。作成に使用したソフトは TeX Live 2023 です。ここでは私みたいに自分の作成した本の出版を考えている方へ少しばかりの助言をしたいと思います。

7.11.1　フォントについて

個人で PDF ファイルを閲覧しているときには意識しなくてもいいフォントが本の出版には必要です。一般的には明朝体とゴシック体です。明朝体の Ryumin-Light とゴシック体の GothicBBB-Medium とを PDF ファイル内に埋め込まなければなりません。Acrobat Reader のメニューから文書のプロパティの中のフォントを選択すると，現在閲覧している文書に使用されているフォントが表示されます。これが OS に依存するフォントや Acrobat Reader に依存するフォントでは著作権の関係からだめなんです。数学の先生方がテスト作成時に用いている一般的なソフトはテストや授業教材を作成することは認められていますが，そのソフトを用いた原稿で本を出版するにはソフトを作成している会社と別交渉が必要です。このフォントが TeX Live では原ノ味フォント (Harano Aji Fonts)[6]が標準で埋め込まれます。この原ノ味フォントを使用した本はまだそんなに多くはありません。本文とあわせて初めて目にするフォントの美しさも感じてください。

現在の最新版 TeX Live 2023[7]では otf パッケージ内にあるすべての字体フォントは使用できません。私が確認できた表示できなかった字体は`\ajMaruKaku{}`と 31 以上の丸文字[8]を出力する`\ajMaru{}`でした。特殊な字体はコンパイル後に確認した方がいいでしょう。TeX Live を使用するにあたって気がついた注意点を書いておきます。使用するテキストファイルの文字コードは UTF-8 です。もちろんファイル名の拡張子は .tex です。何も指定しないで TeX 用のテキストファイルを作ると文字コードは基本 ANSI になります。これを UTF-8 に変更しなければなりません。一度変更してしまえば後は意図的に変更しなければ文字コードは変化しません。変更の仕方は"名前を付けて保存"を選択したときの文字コードの部分を変更するだけです。ただし TeX Live 以外の日本語エディターだとこの文字コードはサポートされていないものがあります。ご注意ください。

画像ファイルは BMP ファイルや PDF ファイル等が使用可能です。以前は必要だった画像領域指定用の bb ファイルも TeX Live 2014 以降では不要になりました。画像を本の中に挿入するには出典を明記しなければ行けません。必ずわかるように保存しておきましょう。

7.11.2　出版費用について

一般的に本の出版には出版社が出版しているシリーズ物の企画本以外は相応の自己負担が必要です。しかし本の売り上げ部数に応じて著作権料が手に入ります。著作権料は契約の内容によって多少は異なると思いますが概ね 5%でしょう。教育関係の本が一般的な黒字のラインとされている何万部も売れることは期待しない方がいいと思います。本を作成した目的を念頭に赤字覚悟で出版化に踏み切るべきだと思います。本の販売の仕方も県内中心なのか，全国展開なのか，また紙媒体なのか電子出版なのかによって出版社の選び方や広告の出し方なども異なってきます。私が出した広告は発行出版社から 2024 年 1 月 5 日に朝日新聞，私が出版社に別に頼んで 4 月号の数学セミナーでした。

[6]詳細は `https://github.com/trueroad/HaranoAjiFonts` 参照
[7]TeX Live 2025 公開済
[8]TeX Live 2025 では 51 以上

また本は一般的に 500 部を単位として印刷されているようです。重版をどれだけ発行から短期間で重ねられるかが商品としての目安です。最後に一つだけ付け加えておくと私が"東京図書出版"を選択した動機の一つに原稿ファイルのアップロードのシステムがしっかり確立されていた事があります。出版社の選定は大事な一歩です。時間をかけて自分の目的にそった信頼できる出版社を選んだ方がいいと思います。

7.11.3 ソースコードのプリアンブル

以下に私が出版した「元気が出る数学の授業 〜高校数学教材集〜」の LaTeX コンパイル時のプリアンブルのソースを書いておきます。TeX ファイルの冒頭のテキストコードは見る機会はないかもしれませんが，最初の設定がうまくいかなくてあきらめてしまう人は少なくありません。参考にしてください。本は A4 で作成して印刷する段階で B5 に縮小して出版しました。表紙カバーの画像と最終頁の発行所等の情報頁以外はすべて私が作成したものです。なおパッケージは必要最低限の物だけを記述しました。御自分の環境によって書き換えてください。TeX に詳しい方はこんな行必要無いだろうと感じる所があるかもしれません。お許しください。

```
\documentclass[11pt,a4j,openany]{jbook}
\voffset=-25pt
\textheight45\baselineskip
\textwidth42zw
\usepackage{otf}
\usepackage{atbegshi}
\AtBeginShipoutFirst{\special{pdf:tounicode 90ms-RKSJ-UCS2}}
\usepackage{amsmath,amssymb}
\usepackage[dvipdfm]{color}
\usepackage[dvipdfm]{graphicx}
\usepackage[dvipdfm]{hyperref}
\usepackage{pxjahyper}    %栞作成用のパッケージ
\hypersetup{    %hyperref オプションリスト
setpagesize=false, bookmarksnumbered=true, bookmarksopen=false,
colorlinks=false,linkcolor=black, citecolor=black,    %リンク色の設定
pdftitle={元気が出る数学の授業}, pdfsubject={〜高校数学教材集〜},
pdfauthor={小澤茂昌}}    %文書プロパティの中のファイルについての情報
\makeatletter
\AtBeginDocument{\DeclareRobustCommand\ref{\@ifstar\@refstar\@refstar}}
\makeatother
\usepackage{multirow}    %【省略可】数行にまたぐ文を書くときのパッケージ
\usepackage{epic,eepic,eclarith,treeprint}    %【省略可】樹形図作成用のパッケージ
\usepackage{fancybox}
\usepackage{bmpsize}    %【省略可】BMP 画像情報を自動所得するパッケージ
\usepackage{colortbl}    %【省略可】表の中のセルに色を付けたいときのパッケージ
\usepackage[T1]{fontenc}
\begin{document}
(ここに本文を入れる。)
\end{document}
```

第8章　高校数学外伝

8.9　高校数学外伝 IX「ダ・ビンチと数学　～数学で健康診断～」

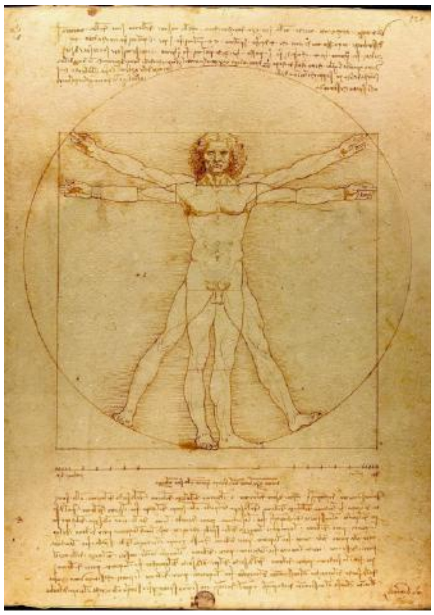
T 「今日は"レオナルド・ダ・ビンチ[1]"について語ってみたい。」

S$_1$「先生～，ダ・ビンチって絵を描いた人でしょ。『モナリザ』ってダ・ビンチじゃなかったっけ？」

T 「その通り。『モナリザ』はダ・ビンチの作品として有名だね。今日は何点か作品を用意してきたよ。左が『モナリザ』[2] で，右が『最後の晩餐』[3]。」


S$_1$「美術と数学なんか関係あるの？」

T 「それが大ありなんだ。『モナリザ』や『最後の晩餐』の中にも数学が隠れているんだけど，今日はダ・ビンチの作品で『ウィトルウィウス的人体図』[4]を鑑賞しようと思っている。こんな作品なんだ。」



S$_2$「何これ～！」

S$_3$「先生～，いいのこんな絵を出して？」

T 「バカモン！ 今日は美術鑑賞が第１の目的なんだ，エッチなことばかり考えてるんじゃない！」

S$_1$「そうはいってもちょっと刺激が強すぎるじゃないの？」

T 「ちょっと，ちょっと，どこを見ているの？ 全体を見よう！ ダ・ビンチは人間の身体を円と正方形を使ってバランス良く絵に表してくれたんだよ。最初に正方形に着目しよう！ 正方形の１辺の長さはどうなっているの？」

S$_2$「え～っと，身長に等しいってこと？」

S$_3$「両手を広げた長さにもなってるよ。」

[1]Leonardo da Vinchi(1452-1519)
[2]画像は Wikipedia「モナ・リザ」から引用
[3]画像は Wikipedia「最後の晩餐 (レオナルド)」から引用
[4]画像は Wikipedia「ウィトルウィウス的人体図」から引用

T 「そうなんだ，ダ･ビンチは人間の身長というのは両手を広げた長さに等しい特長を生かしてまず正方形を設置したんだ。さあ円に注目しよう。円の半径はどうなっている？」

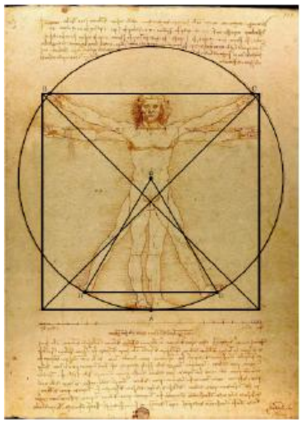
S_2 「え〜っと，どこに等しいってことだよね。」

S_1 「先生，円の中心がどこだかわからないんだけど。」

T 「いいところに気がついたね，円の中心はおへそなんだ。」

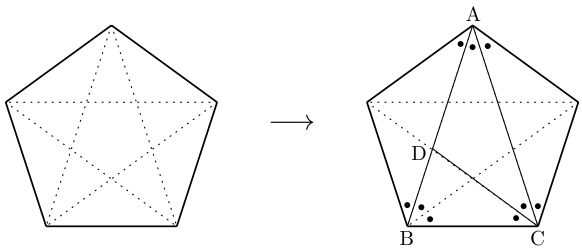
S_1 「じゃ，おへそから足までの距離が円の半径になっているってこと？」

T 「その通り，この『ウィトルウィウス的人体図』はダ・ビンチが発見したんじゃなくて，紀元前にウィトルウィウスという建築家が記述しているんだけど，それは正方形までで，ダ・ビンチは独自の観点からその図に円を重ねたことが大発見なんだ。図を用意したよ。円の中心はおへそで，正方形の対角線の交点は急所のちんちんなんだ。」



T 「今日はこの正方形の 1 辺 a と半径 r の関係を探りながら自分の身体を探求していこうと思っている。結論から言うとこの a と r の関係は正五角形の対角線と 1 辺の長さの関係と同じなんだ。正五角形の 1 辺の長さを r としたとき，対角線の長さが a になるんだ。」

T 「ようやく数学らしくなってきたね。さあ正五角形をフリーハンドでいいからノートに書いて，この a と r の関係式を導いてみようか。」



T 「a と r の関係式を導いて $\dfrac{a}{r}$ を求めてごらん。」

S_2 「相似の関係から長さの比を表せばいいのかなぁ〜。」

T 「その通り，挑戦してごらん。」

$$
\begin{aligned}
&\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{CBD} \text{ より}\\
&\mathrm{AB} : \mathrm{BC} = \mathrm{CB} : \mathrm{BD}\\
&a : r = r : (a-r)\\
&a^2 - ar - r^2 = 0\\
&a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} r\\
&a > 0 \text{ より} \quad \frac{a}{r} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \fallingdotseq 1.6180\cdots
\end{aligned}
$$

T 「多少面倒だけど，意外と簡単に求めることできたよね。この値は黄金比といって数学ではファイ φ という記号を用いて表しているんだ。そして △ABC は黄金三角形っていう名前もついている。さぁ保健室の先生には断ってきたから，今から保健室の身長計で身長とおへそまでの長さを測って自分の値を計算して，この黄金比の値と比べてみましょう！」

S 「え〜っ！」

8.10　高校数学外伝 X「焼き肉の追加は 2 皿まで」 (本文 P30 参照)

T 「今日の数学の授業は感動を数値で表すことに挑戦します。」
S_2 「先生，感動を数で表すって意味わかんないんだけど……。」
T 「あわてない，あわてない。物事には順序がある。最初に感動を定義しなくてはいけないな。何かこの頃の生活で感動したことある？」
S_3 「昨日，サッカーの試合で勝ったよ。」
S_1 「私は練習試合だったけれどバレーの試合で勝ったよ。」
T 「部活の勝った負けたでもいいんだけど，何かみんなに共通する感動がないかな〜。」
S_3 「そうそう，試合に勝ったご褒美に母から焼き肉をごちそうしてもらって家族全員で食べに行ったんだ。カルビーがおいしくてさ 5 皿もおかわりしちゃったよ。大満足！」
T 「それにしようか，焼き肉だったらみんな好きだし共通体験もあるから理解しあえる。じゃ今日の問題は焼き肉を食べたときの感動を数値で表そうという課題にしようか？」
S_1 「どうやって焼き肉の感動を数で表すの？」
S_2 「そうだよ，数学だってできることとできないことがあるに決まってる。感動なんて曖昧なものを数で表せるわけないじゃん。」
T 「それができるのが数学のすごいところ。この焼き肉の感動を表すにはこの前学習した対数を使うんだ。」
S_2 「げっ！ それってもしかしたらあのわけのわからない log？」
T 「対数がきらいな気持ちもまぁわかるけど，じゃ復習で関数 $y = \log_2 x$ のグラフを書いてみようか。」

S_3 「できたよ！ なかなか上がらない右上がりだったよね。」
T 「今日使うのはこんな関数だよ。$y = \log_2(x + 1)$ 教科書の最後の頁に常用対数表があるからそれを使って対応表とグラフを作ってみよう。」
S_1 「先生，計算はタブレット使っていい？」
T 「もちろんいいよ，でもそのままじゃ常用対数表をつかえないよね。底の変換公式覚えているかな？」
S_3 「それは大丈夫，え〜と $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ だから $y = \frac{\log_{10}(x+1)}{\log_{10} 2}$ で計算すればいいよね。」
T 「その通り，あとあと値を比較したいからノートに $x = 1$ から $x = 10$ までの表を作ってまとめてごらん。」
S_1 「先生，10 皿食べるなんて無理。」
S_2 「おれはカルビーだったらいけるかも。」
T 「そうだなぁ〜，じゃ区切りがいいから $x = 7$ までいいや。$x = 7$ のときは $y = 3$ になることはわかるね。やってみよう！」

T 「できたかな，この値が焼き肉の感動を表す値なんだけど，そのままじゃわからないだろうから表の右に値を比べた増減表を作ってみようか。」

焼き肉の感動積算・感動比較対応表

x 皿目	感動積算	感動比較
0	0	−−
1	1	1
2	1.585	0.585
3	2	0.415
4	2.322	0.322
5	2.585	0.263
6	2.808	0.223
7	3	0.192

T 「焼き肉の 1 皿目を食べたとき $x = 1$ とします。そのときの y の値が感動の大きさを表しているんだ。例えば $x = 1$ になると y が 0 から 1 に増えるので，1 皿目の感動を 1 と表現できるんだ。対応する x の値を求めることでそのときの感動の大きさを数値で

図 1. 焼き肉の感動積算グラフ

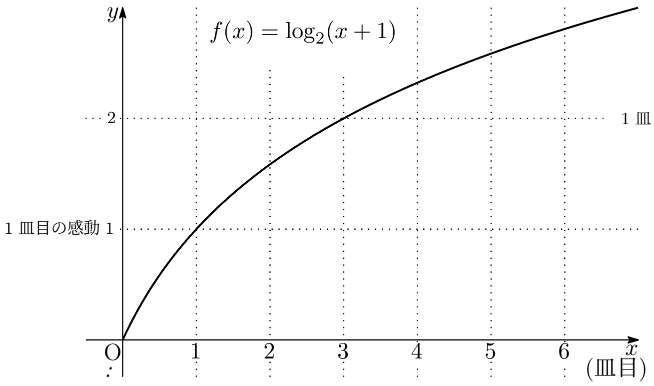
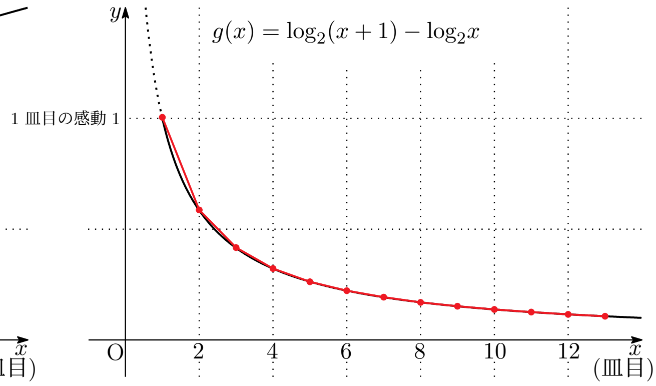


図 2. 焼き肉の感動比較グラフ



比較することができるんだ。1 皿目の焼き肉の感動を 1 としたとき 2 皿目は 1.585，これは 1 皿目を含んだ感動の値だから 2 皿目の感動はその差の値 0.585 になるんだ。式で表すと $y = \log_2(x+1) - \log_2 x$ になる。ようするに 2 皿目は最初の 1 皿目と比較して約 6 割の感動しかないということなんだ。」

S_3「へぇ～，ということは 3 皿目の感動は約 4 割，4 皿目は 3 割しかないのか～。」

S_2「どんどん減っていくのは何となくわかる気がする……。」

T「そうなんだ，これは**ヴェーバー・フェヒナーの法則**といって，人の感覚の大きさは受ける刺激の強さの対数に比例するという法則なんだ。これは 19 世紀にドイツの**エルンスト・ヴェーバー**教授とその弟子**グスタフ・フェヒナー**教授がまとめた法則なんだ。」

S_2「5 皿目以降はほとんど約 2 割で同じなんだ。」

T「いいところに気がついたね。3 皿目で最初の 1 皿目の感動の 2 倍を味わっているんだ。だからどんなにおいしくても 3 皿目か 4 皿目でやめておいた方がいいということなんだ。お金のことを考えると焼き肉の追加は 2 皿までが Best ということだ。」

S_1「人が感じる感動が数学の式と値で表せるってなんか不思議だけどすごいね。先生，これって焼き肉だけにあてはまる性質なの？」

T「これはすべての感動にいえることなんだ。最初の感動を基準に 2 回目の同じような事柄の感動は最初の 6 割程度しか感動を味わえないって事なんだ。テストで初めて 100 点取ったときと 2 回目の 100 点とは喜びが違うことはわかるかなぁ～。」

S_2「オレ，それわかる，わかる。」

S_1「なんであなたがテストの話題に入ってくるのよ。いつも赤点ぎりぎりでしょ。」

S_2「厳しいなぁ～，今度のテストは感動できるようにがんばるから。」

T「こらこらケンカしない，テストはあまりいい例ではなかったな。人間は以前に経験した成功体験と同じ感動を 2 回目では味わうことはできない。もしそれ以上の感動を味わいたいときは規模を大きくしなければいけない。例えば 1 万円を使うことで得られた感動より大きな感動を得るためには，2 回目はそれ以上の金額，例えば 10 万円を使わないと得られない。3 回目は……といった具合にどんどん大きくならないと初回を上回る感動を得られないんだ。だからどこで自制をかけるかが重要になるんだ。」

S_2「そうか～，テストができないのは自制をかけすぎているせいなんだ。」

S_1「関係ないと思うけど。」

S_2「もう～！ よ～し次のテストは必ずいい点とることを宣言するよ。」

T「それは先生も応援するよ。まずは最初の感動を経験しないと次のステップにいかないからな。何点を目標にするんだ？」

S_2「ええっと～，そうだな 6 割の 60 点。」

付 録A　資料

A.18　ウラムの螺旋

(本文 P21 参照)

A.18.1　ウラムの螺旋 (1-143)

HRNO______________　氏名____________________________

問. 素数を塗って素数が表す形を感じましょう。

……	143	142	141	140	139	138	137	136	135	134	133
101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	132
102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90	131
103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89	130
104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88	129
105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87	128
106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86	127
107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85	126
108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84	125
109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83	124
110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	123
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122

A.18.2 ウラムの螺旋 (1-1024)

(本文 P22 参照)

ウラムの螺旋 (1-1024) HRNO____________ 氏名____________________

1024	1023	1022	1021	1020	1019	1018	1017	1016	1015	1014	1013	1012	1011	1010	1009	1008	1007	1006	1005	1004	1003	1002	1001	1000	999	998	997	996	995	994	993
901	900	899	898	897	896	895	894	893	892	891	890	889	888	887	886	885	884	883	882	881	880	879	878	877	876	875	874	873	872	871	992
902	785	784	783	782	781	780	779	778	777	776	775	774	773	772	771	770	769	768	767	766	765	764	763	762	761	760	759	758	757	870	991
903	786	677	676	675	674	673	672	671	670	669	668	667	666	665	664	663	662	661	660	659	658	657	656	655	654	653	652	651	756	869	990
904	787	678	577	576	575	574	573	572	571	570	569	568	567	566	565	564	563	562	561	560	559	558	557	556	555	554	553	650	755	868	989
905	788	679	578	485	484	483	482	481	480	479	478	477	476	475	474	473	472	471	470	469	468	467	466	465	464	463	552	649	754	867	988
906	789	680	579	486	401	400	399	398	397	396	395	394	393	392	391	390	389	388	387	386	385	384	383	382	381	462	551	648	753	866	987
907	790	681	580	487	402	325	324	323	322	321	320	319	318	317	316	315	314	313	312	311	310	309	308	307	380	461	550	647	752	865	986
908	791	682	581	488	403	326	257	256	255	254	253	252	251	250	249	248	247	246	245	244	243	242	241	306	379	460	549	646	751	864	985
909	792	683	582	489	404	327	258	197	196	195	194	193	192	191	190	189	188	187	186	185	184	183	240	305	378	459	548	645	750	863	984
910	793	684	583	490	405	328	259	198	145	144	143	142	141	140	139	138	137	136	135	134	133	182	239	304	377	458	547	644	749	862	983
911	794	685	584	491	406	329	260	199	146	101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	132	181	238	303	376	457	546	643	748	861	982
912	795	686	585	492	407	330	261	200	147	102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90	131	180	237	302	375	456	545	642	747	860	981
913	796	687	586	493	408	331	262	201	148	103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89	130	179	236	301	374	455	544	641	746	859	980
914	797	688	587	494	409	332	263	202	149	104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88	129	178	235	300	373	454	543	640	745	858	979
915	798	689	588	495	410	333	264	203	150	105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87	128	177	234	299	372	453	542	639	744	857	978
916	799	690	589	496	411	334	265	204	151	106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86	127	176	233	298	371	452	541	638	743	856	977
917	800	691	590	497	412	335	266	205	152	107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85	126	175	232	297	370	451	540	637	742	855	976
918	801	692	591	498	413	336	267	206	153	108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84	125	174	231	296	369	450	539	636	741	854	975
919	802	693	592	499	414	337	268	207	154	109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83	124	173	230	295	368	449	538	635	740	853	974
920	803	694	593	500	415	338	269	208	155	110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	123	172	229	294	367	448	537	634	739	852	973
921	804	695	594	501	416	339	270	209	156	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	171	228	293	366	447	536	633	738	851	972
922	805	696	595	502	417	340	271	210	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	227	292	365	446	535	632	737	850	971
923	806	697	596	503	418	341	272	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	291	364	445	534	631	736	849	970
924	807	698	597	504	419	342	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	363	444	533	630	735	848	969
925	808	699	598	505	420	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	443	532	629	734	847	968
926	809	700	599	506	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	531	628	733	846	967
927	810	701	600	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	627	732	845	966
928	811	702	601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	731	844	965
929	812	703	704	705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	843	964
930	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	963
931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960	961	962

A.19　地球温暖化は進んでいるのだろうか？ ワークシート(本文 P3 参照)

HRNO＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(1) 資料の範囲を求めよう！

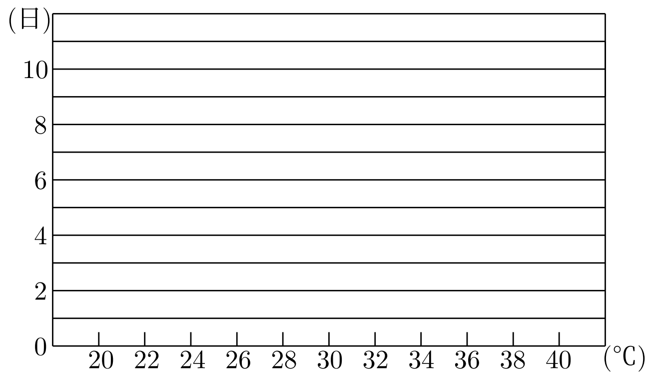
資料	最大値	最小値	範囲 (レンジ)
年			
年			

(2) 度数分布表を作ってみよう！

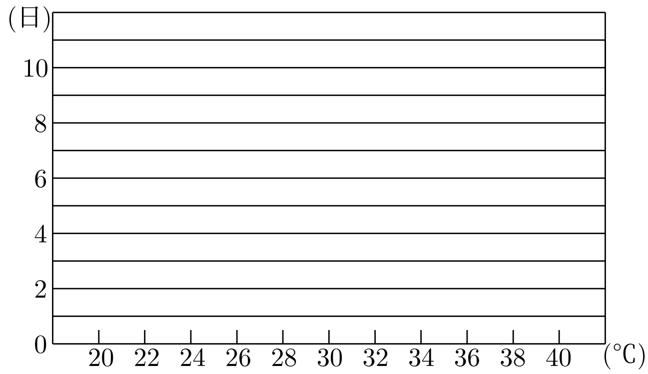
階級	年		年	
	度数	相対度数	度数	相対度数
20 以上 〜 22 未満				
22 〜 24				
24 〜 26				
26 〜 28				
28 〜 30				
30 〜 32				
32 〜 34				
34 〜 36				
36 〜 38				
38 〜 40				
計				

(3) ヒストグラムを作ってみよう！

＿＿＿＿年



＿＿＿＿年



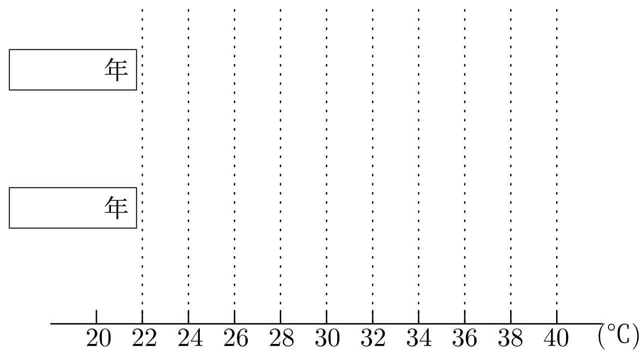
(4) 代表値をまとめよう！

資料	平均値 (アベレージ)	最頻値 (モード)	中央値 (メジアン)
年			
年			

(5) 度数分布表から四分位数を求めよう！

資料	第一四分位数 Q_1	第二四分位数 Q_2	第三四分位数 Q_3
年			
年			

(6) 箱ひげ図をまとめよう！



(7) 資料を分析して地球温暖化の考察を書こう！

(8) 【復習】度数分布表から平均値を求めてみよう！

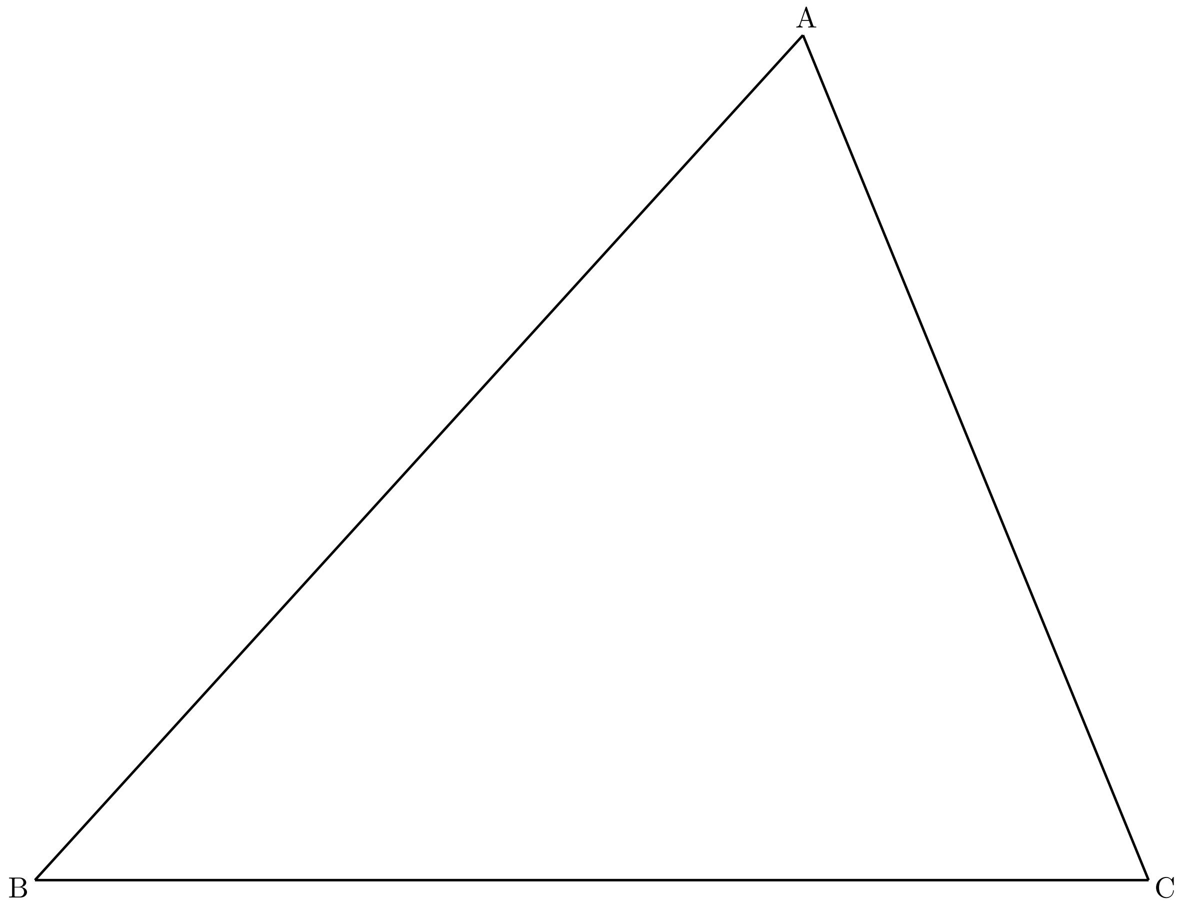
＿＿＿＿年

階級	階級値	度数	(階級値)×(度数)
20 以上 〜 22 未満			
22 〜 24			
24 〜 26			
26 〜 28			
28 〜 30			
30 〜 32			
32 〜 34			
34 〜 36			
36 〜 38			
38 〜 40			
計			

A.20　9 点円　生徒用ワークシート　(本文 P7 参照)

HRNO＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問. 次の三角形において以下の点を作図しなさい。
　①　各頂点から降ろす垂線と対辺との交点 H_A, H_B, H_C(垂線の足)
　②　各辺の中点 M_1, M_2, M_3
　③　頂点から垂心 H(①の交点) までの中点 M_A, M_B, M_C
9 つの点が書けた人は②の作図を利用して △ABC の外接円を書いて待っていてください。皆さんの作図が正確にできたかどうか確かめします。



A.20.1　花びら取りゲーム必勝法　(本文 P17 参照)

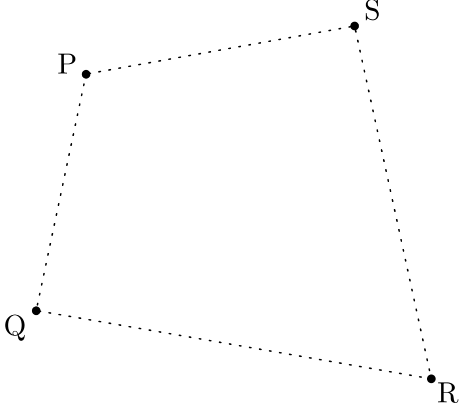
花びら取りのゲームの必勝法は対称性を利用します。相手が取った所と反対側の花びらを両側が奇数個ずつ残るように取っていくのです。こうすれば必ず最後自分が取ることができるのです。わからない生徒が不思議がって何とか教師に勝利したいという気持ちは教師の側を元気にさせてくれます。自分が選択扱いの数学の時間にこの授業をやった時には，その後授業を終わった別の教科を選択した生徒を巻き込んで，勝負勝負と意気込む生徒が多数いました。

A.21　4点が同一円周上にある条件

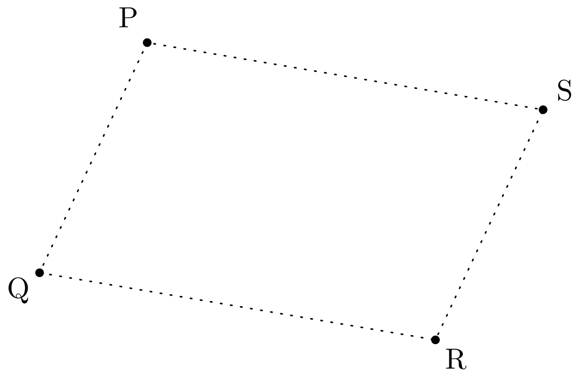
(本文P8参照)

HRNO________________　氏名___________________________

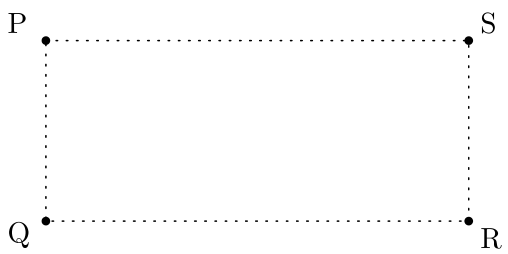
① 四角形



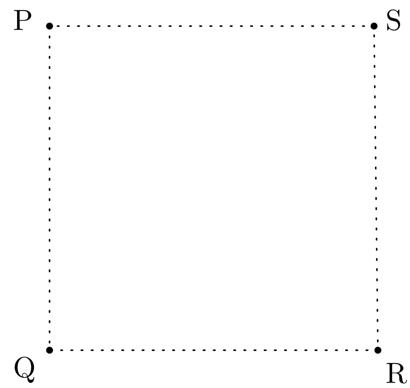
② 平行四辺形



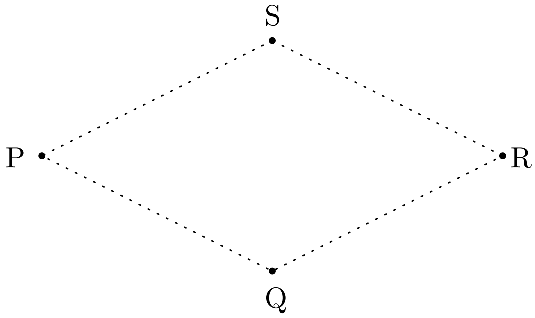
③ 長方形



④ 正方形



⑤ ひし形



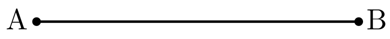
⑥ 等脚台形

A.22　定幅図形の作図に挑戦！

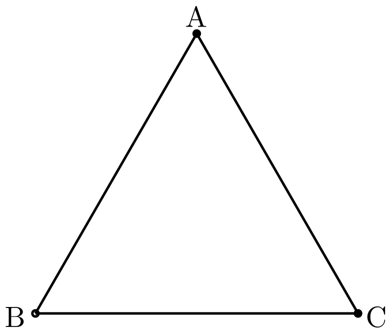
(本文 P10 参照)

HRNO________________　氏名___________________________

(1) 直径 AB の円

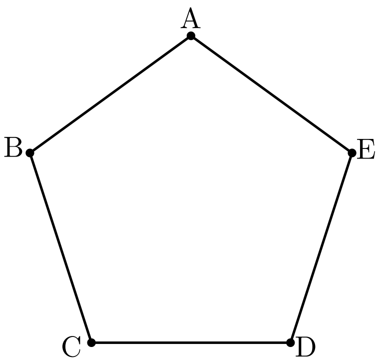


(2) ルーローの三角形



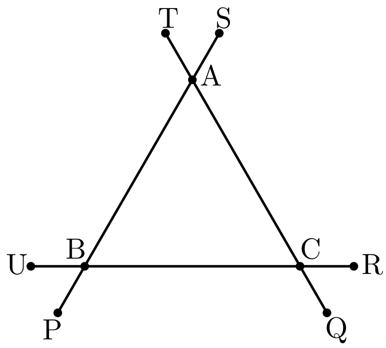
① 点 A を中心に半径 AB の円を B から C まで引く
② 点 B を中心に半径 BC の円を C から A まで引く
③ 点 C を中心に半径 CA の円を A から B まで引く

(3) ルーローの五角形



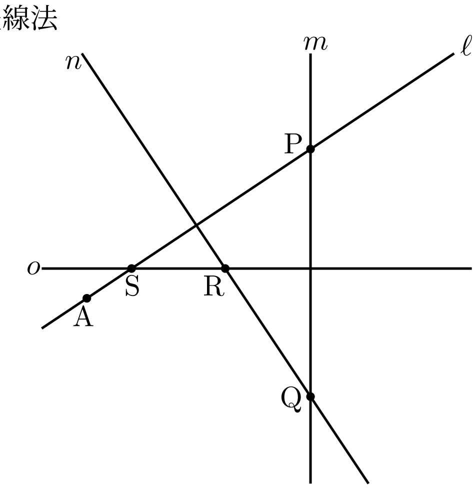
① 点 A を中心に半径 AC の円を C から D まで引く
② 点 B を中心に半径 BD の円を D から E まで引く
③ 点 C を中心に半径 CE の円を E から A まで引く
④ 点 D を中心に半径 DA の円を A から B まで引く
⑤ 点 E を中心に半径 EB の円を B から C まで引く

(4) ルーローの三角形の発展形



① 点 A を中心に半径 AP の円を P から Q まで引く
② 点 C を中心に半径 CQ の円を Q から R まで引く
③ 点 B を中心に半径 BR の円を R から S まで引く
④ 点 A を中心に半径 AS の円を S から T まで引く
⑤ 点 C を中心に半径 CT の円を T から U まで引く
⑥ 点 B を中心に半径 BU の円を U から P まで引く

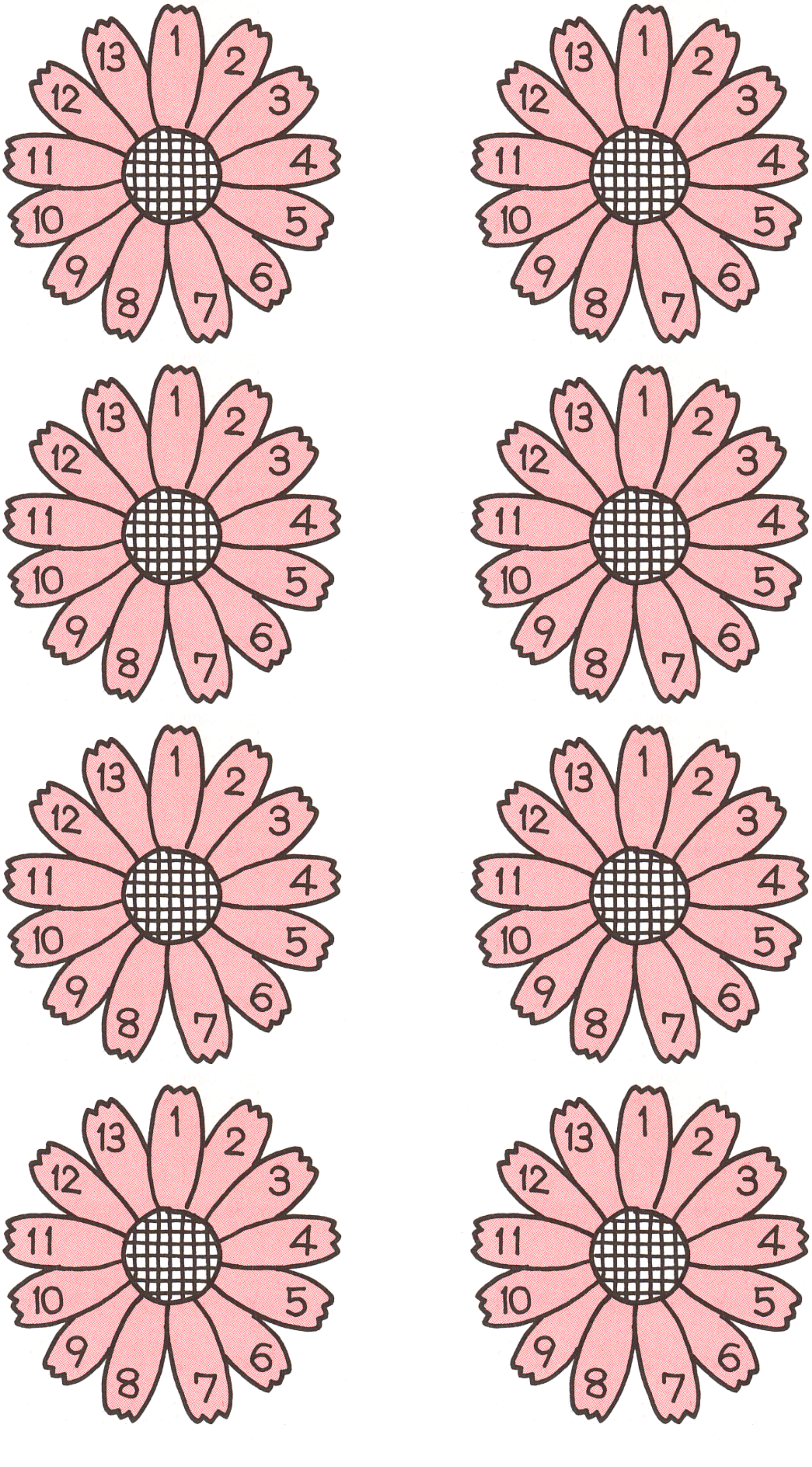
(5) 交差線法



① 点 P を中心に半径 PA の円を ℓ から m まで引く
② 点 Q を中心に①の終点にあわせ m から n まで引く
③ 点 R を中心に②の終点にあわせ n から o まで引く
④ 点 S を中心に③の終点にあわせ o から ℓ まで引く
⑤ 同様に点 P を中心に m まで引く
⑥ 点 Q を中心に n まで引く
⑦ 点 R を中心に o まで引く
⑧ 点 S を中心に A まで引く

A.23　花びら取りゲーム資料

(本文 P17，資料 P67 参照)



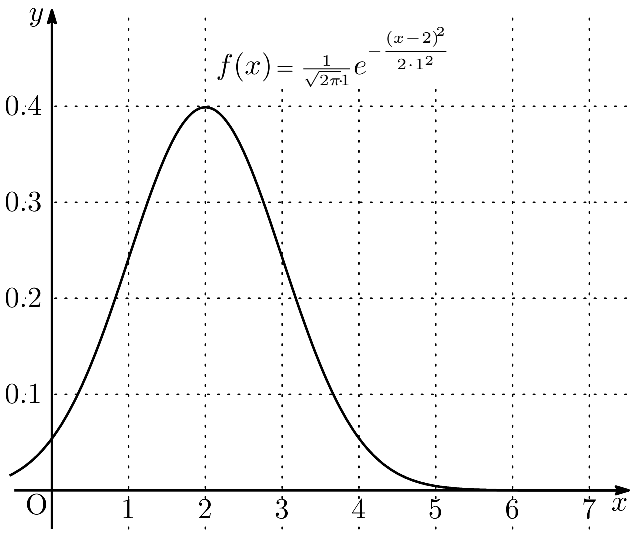
A.24　二項分布と正規分布のグラフ (コイン編)　(本文 P38 参照)

HRNO________________　氏名____________________________

問．$B\left(4,\ \frac{1}{2}\right)$ の確率分布表を作ってみよう。

X	0	1	2	3	4	計
P						

問．$B\left(4,\ \frac{1}{2}\right)$ のグラフを作ってみよう。



二項分布 $B(n,\ p)$ と正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ の関係をまとめよう。

最初に二項分布 $B(n,\ p)$ の n と p をつかって正規分布の m と σ^2 を表してみよう。

$m = \boxed{}$，$\sigma^2 = \boxed{}$

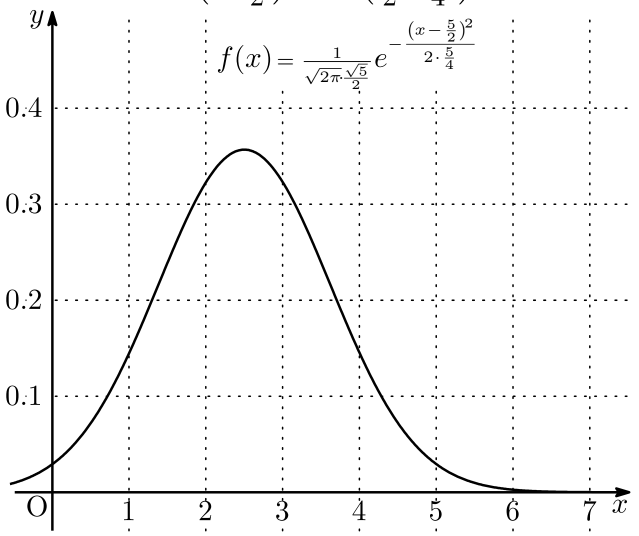
これから二項分布 $B\left(4,\ \frac{1}{2}\right)$ は正規分布 $N\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$ で近似できる。

二項分布 $B\left(5,\ \frac{1}{2}\right)$ と $B\left(6,\ \frac{1}{2}\right)$ のグラフにも挑戦しよう。

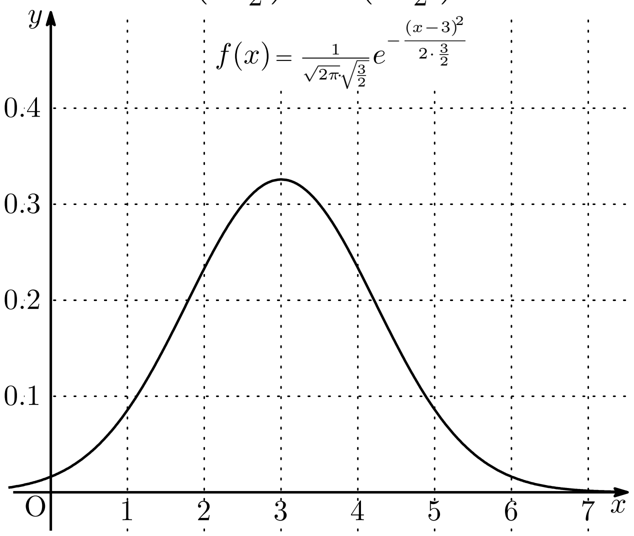
問．$B\left(5,\ \dfrac{1}{2}\right)$ の確率分布表を作って二項分布のグラフを作り，正規分布のグラフと比較してみよう。

X	0	1	2	3	4	5	計
P							

$B\left(5,\ \dfrac{1}{2}\right)$ と $N\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{4}\right)$



$B\left(6,\ \dfrac{1}{2}\right)$ と $N\left(3,\ \dfrac{3}{2}\right)$



問．$B\left(6,\ \dfrac{1}{2}\right)$ の確率分布表を作って二項分布のグラフを作り，正規分布のグラフと比較してみよう。

X	0	1	2	3	4	5	6	計
P								

【計算スペース】

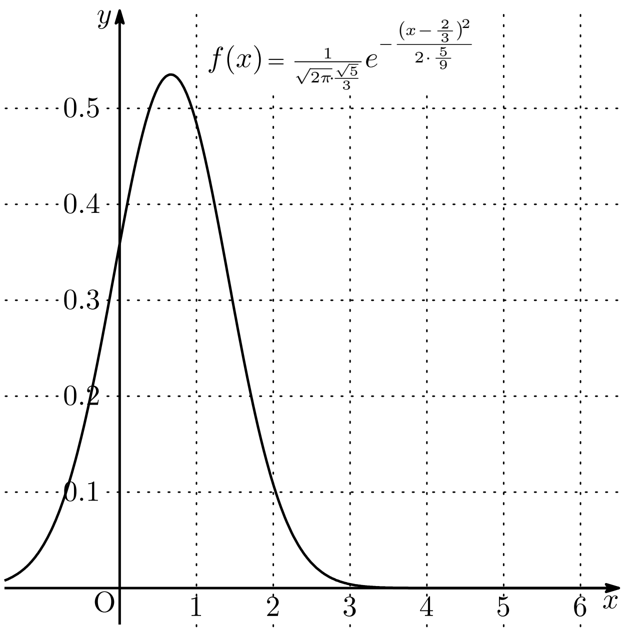
A.25　二項分布と正規分布のグラフ (ダイス編)　(本文 P41 参照)

HRNO＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問．$B\left(4,\ \frac{1}{6}\right)$ の確率分布表を作ってみよう。

X	0	1	2	3	4	計
P						

問．$B\left(4,\ \frac{1}{6}\right)$ のグラフを作ってみよう。



二項分布 $B(n,\ p)$ と正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ の関係をまとめよう。

最初に二項分布 $B(n,\ p)$ の n と p をつかって正規分布の m と σ^2 を表してみよう。

$m = \boxed{}$， $\sigma^2 = \boxed{}$

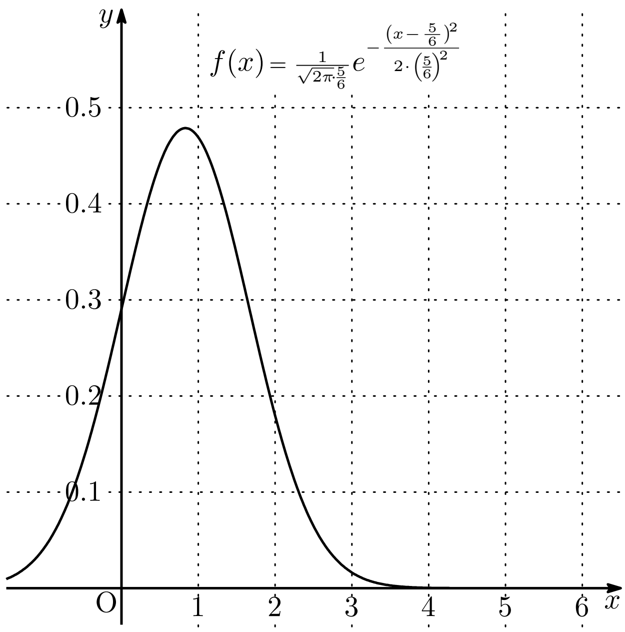
これから二項分布 $B\left(4,\ \frac{1}{6}\right)$ は正規分布 $N\left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$ で近似できる。

二項分布 $B\left(5,\ \frac{1}{6}\right)$ と $B\left(6,\ \frac{1}{6}\right)$ のグラフにも挑戦しよう。

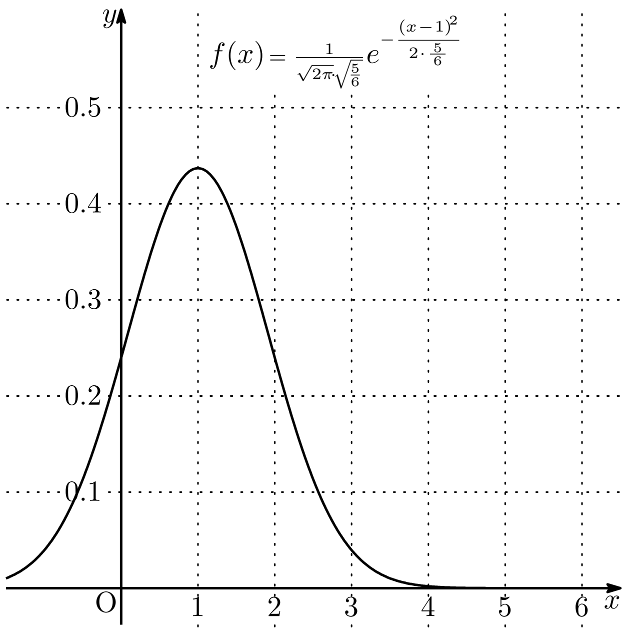
問．$B\left(5, \dfrac{1}{6}\right)$ の確率分布表を作って二項分布のグラフを作り，正規分布のグラフと比較してみよう。

X	0	1	2	3	4	5	計
P							

$B\left(5, \dfrac{1}{6}\right)$ と $N\left(\dfrac{5}{6}, \left(\dfrac{5}{6}\right)^2\right)$ のグラフ



$B\left(6, \dfrac{1}{6}\right)$ と $N\left(1, \dfrac{5}{6}\right)$ のグラフ



問．$B\left(6, \dfrac{1}{6}\right)$ の確率分布表を作って二項分布のグラフを作り，正規分布のグラフと比較してみよう。

X	0	1	2	3	4	5	6	計
P								

【計算スペース】

付録B 「元気が出る数学の授業 ～高校数学教材集～」正誤表

「元気が出る数学の授業 ～高校数学教材集～」に以下の通り誤りがありました。お詫びして訂正いたします。

訂正箇所	誤	正
P6 19行目	辺 EF と通る長さ	辺 EF を通る長さ
P15 14行目	点 C から降ろした垂線で	点Cから垂線を降ろし, 斜辺をACとする三角形で
P42 30行目	4003であることはわかっているが, 現在3117回	4003であると予想されるが, 現在2318回
P42 31行目	301 桁	221 桁
P51 13行目	$x^2 = \pm\sqrt{i}, \pm\sqrt{-i}$	$x = \pm\sqrt{i}, \pm\sqrt{-i}$
P68 25行目	$S = \int_\alpha^\beta (\beta - x)(\alpha - x)dx = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$	$S = -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$
P73 13行目	$\varphi^3 = \varphi^2 \cdot \varphi + 1 = (\varphi+1)\varphi + 1 = \varphi^2 + \varphi + 1 = 2\varphi + 1$	$\varphi^3 = \varphi^2 \cdot \varphi = (\varphi+1)\varphi = \varphi^2 + \varphi = (\varphi+1) + \varphi = 2\varphi + 1$
P74 8 行目	等比 β	公比 β
P76 1 行目	正確	性格
P76 3 行目	$a_n = {}_{n-1}C_0 + {}_{n-1}C_1 + {}_{n-1}C_2 + {}_{n-1}C_3 + {}_{n-1}C_4$	$a_n = {}_{n-1}\mathrm{C}_0 + {}_{n-1}\mathrm{C}_1 + {}_{n-1}\mathrm{C}_2 + {}_{n-1}\mathrm{C}_3 + {}_{n-1}\mathrm{C}_4$
P80 31行目	($a_n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3$：右図参照)	($a_n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_3$：右図参照)
P99 30行目	見上げているのは母マリア	見上げているのはマグラダのマリア

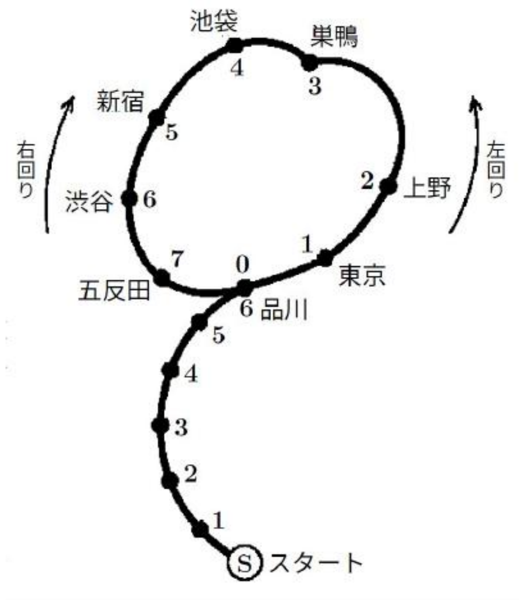
(最終更新日 : 2025 年 4 月 5 日)

参考文献・画像引用先

書名	出版年	著者・出版社	参照頁
数学セミナー	2012 年 8月号 2013 年 1月号	日本評論社	29
秋山 仁の算数ぎらい大集合	1994 年 7月	日本放送出版協会	17
NHK ワンダー数学ランド	1998 年 8月		10
Newton 別冊 数学の世界 数の神秘編	2018 年11月5日	ニュートンプレス	16
1 杯目のビールが美味しい理由を数学的に証明してみました	2024 年 9月	堀口 智之 著・幻冬舎	30
第 3 の予言	1990 年 7月	ダニエル・レジュ著・たま出版	53
聖母マリア像の涙	2000 年12月	安田貞治著・エンデルレ書店	54
新約聖書 新共同訳	1987 年	日本聖書協会	55
Wikipedia			10, 54, 60 60, 60
YOU TUBE		TV東京	60
Amazon			2
LaTeX2ε 美文書作成入門	2005 年 3月1日	技術評論社	

あとがき

私が書いた本が世に出て約１年半たちました。積極的な広報活動をしないわりにはまぁまぁの部数が販売され驚いています。若い頃からいつかは国会図書館に名を刻みたいと思ってきました。中学校編の「元気が出る数学の授業」を作って何人かの先生方に配布しましたが，自費出版では国会図書館に名を刻めない。なんとか全国展開で書籍を販売できないかとずっと思ってきたのが高等学校編の「元気が出る数学の授業　～高校数学教材集～」で実を結びました。意志の力が弱くても長年思い続けていれば何とかなるもんだと感じています。２作目は発売されないとは思いますが研究は継続していきたいと思っています。最後に右図は「元気が出る数学の授業　～高校数学教材集～」の数学Ｉの「数と式」の教材として紹介した「山手線決定マジック」の図です。"品川"が抜け落ちていました。修正版を載せておきます。



元気が出る数学の授業 II
～高校数学教材集～
2025 年 7 月31日　初版第 1 刷発行

著者　小澤茂昌（おざわしげまさ）
発行者　小澤茂昌
発行所　和泉書院
郵便振替 00850 − 0 − 69925
落丁・乱丁本はありません。
Web-page : http://furano.uijin.com/index.html
mail : furano@po2.across.or.jp